

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методический комплекс
для студентов технических специальностей

В 2 частях

Часть 2

Под общей редакцией
В. С. Вакульчик, Ф. Ф. Яско

Новополоцк
2017

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
С71

Рекомендовано к изданию методической комиссией
радиотехнического факультета в качестве
учебно-методического комплекса (протокол № 6 от 11.06.2015)

АВТОРЫ:

В.С. Вакульчик, Ф.Ф. Яско, И.Е. Андрушкевич,
В.А. Жак, А.П. Мателенок

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

канд. физ.-мат. наук, доц., зав. кафедрой высшей математики № 3
Белорусского национального технического университета А. В. КАПУСТО;
канд. физ.-мат. наук, доц., зав. кафедрой высшей математики
Полоцкого государственного университета А. А. КОЗЛОВ

Специальные главы высшей математики : учеб.-метод. комплекс
С71 для студентов техн. специальностей : в 2 ч. / В. С. Вакульчик [и др.] ; под
общ. ред. В. С. Вакульчик, Ф. Ф. Яско. – Новополоцк : Полоцкий госу-
дарственный университет, 2017. – Ч. 2. – 168 с.
ISBN 978-985-531-576-7.

Изложены теоретические основы двух важных разделов курса высшей ма-
тематики для студентов технических специальностей: «Элементы теории поля»
и «Основные уравнения математической физики», спроектированы основные
этапы практических занятий; предложено соответствующее дидактическое
обеспечение: графические схемы, информационные таблицы, обучающие зада-
чи, вопросы к экзамену, глоссарий.

Предназначен для студентов и преподавателей технических специаль-
ностей высших учебных заведений.

**УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73**

**ISBN 978-985-531-576-7 (ч. 2)
ISBN 978-985-531-378-7**

© Полоцкий государственный университет, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
Учебный модуль 12. Элементы теории поля	8
Введение	8
Дидактические цели обучения	8
Учебно-методическая карта модуля	9
Графическая схема модуля	10
Информационная таблица «Элементы теории поля»	11
Краткое содержание теоретического материала	21
12.1. Основные понятия скалярных полей	21
12.2. Основные понятия векторных полей	23
12.3. Поток векторного поля	26
12.4. Дивергенция векторного поля.	
Теорема Остроградского – Гаусса	32
12.5. Циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля.	
Теорема Стокса	44
12.6. Операторы Гамильтона и Лапласа	53
12.7. Специальные виды векторных полей (потенциальное, соленоидальное, гармоническое)	54
Экзаменационные вопросы	61
Литература	62
Глоссарий	64
Методические указания к проведению практических занятий	69
Учебно-информационный блок для проведения практических занятий	69
Основная и дополнительная литература	70
I. Основные понятия векторного анализа	71
II. Поток векторного поля через поверхность. Дивергенция векторного поля. Теорема Остроградского – Гаусса	81
Задачи для самостоятельного решения	93
III. Циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля.	
Теорема Стокса	96
Задачи для индивидуальных домашних заданий	106
IV. Операторы Гамильтона и Лапласа.	
Потенциальное и соленоидальное векторные поля	108

Учебный модуль 13. Основные уравнения математической физики	114
Введение	114
Дидактические цели обучения	114
Учебно-методическая карта модуля	115
Графическая схема модуля	116
Информационная таблица «Основные уравнения математической физики»	117
Краткое содержание теоретического материала	120
13.1. Основные определения. Классификация уравнений математической физики второго порядка	120
13.2. Формулировка краевых задач для основных уравнений математической физики	121
13.2.1. Вывод уравнения свободных малых колебаний струны	121
13.2.2. Начальные и граничные условия	123
13.2.3. Формулировка краевой задачи для уравнения теплопроводности	124
13.2.4. Формулировка краевой задачи для уравнения Лапласа	125
13.3. Решение волнового уравнения на прямой по формуле Даламбера	126
13.4. Метод Фурье решения волнового уравнения	127
13.4.1. Метод разделения переменных	127
13.4.2. Использование граничных условий	128
13.4.3. Использование начальных условий	130
13.5. Решение уравнения теплопроводности методом Фурье	132
Экзаменационные вопросы	135
Методические указания к проведению практических занятий	136
Учебно-информационный блок для проведения практических занятий	136
Основная и дополнительная литература	136
I. Решение простейших уравнений математической физики. Формула Даламбера решения задачи Коши для волнового уравнения	137
II. Решение волнового уравнения и уравнения теплопроводности методом Фурье	139
Приложение «Векторный анализ в системах компьютерной алгебры: Maple и Mathcad»	145

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методический комплекс (УМК) является частью серии учебно-методических пособий, разрабатываемых кафедрой высшей математики Полоцкого государственного университета» по курсу «Высшая математика» для студентов технических специальностей под руководством кандидата педагогических наук, доцента В. С. Вакульчик. Теоретические и дидактические принципы разработки таких пособий изложены в нулевом учебном модуле [7]. Мы надеемся, что наши читатели знакомы, а точнее, изучили этот УМК, в противном случае советуем ознакомиться хотя бы с его нулевым модулем.

В предлагаемом УМК, содержание которого представлено в виде графической схемы (рис. 1), авторами предпринята попытка спроектировать процесс обучения математике как систему целей, содержания, форм, методов и средств обучения, обеспечивающих в своем взаимодействии организацию познавательной деятельности студентов с учетом дифференциации студенческой аудитории. Дидактическую основу УМК составляют системный, когнитивно-визуальный и деятельностный подходы к обучению математике, прикладная направленность, а также дидактические принципы научности, системности, целостности, доступности, развивающей деятельности. В применении к математике авторы руководствуются сформулированным А.А. Столяром исходным положением теории обучения математике «Обучение математике есть дидактически целесообразное сочетание обучения математическим знаниям и математической деятельности». Отдельное внимание необходимо обратить на наличие в УМК таких дидактических средств, как графические схемы, информационные таблицы, глоссарий, обобщенные планы, алгоритмические указания, алгоритмическое выделение этапов познавательной деятельности, которые позволяют организовать мыслительную деятельность по переработке математической информации, помогают обучающемуся в логической организации, структурировании, систематизации математических знаний.

Считаем необходимым еще раз привести методические рекомендации работы в информационном поле модуля, изложенные в нулевом учебном модуле [7]. В самом общем виде процесс познания новой информации состоит из следующих этапов: первичное восприятие → изучение основных ее элементов → углубление, обобщение, систематизация полу-

ченной информации → включение познанного нового знания в систему имеющихся представлений, знаний, мировоззрения в целом. Исходя из этих психолого-методологических соображений предлагается следующая последовательность этапов работы в информационном поле модуля.

0. С помощью методической карты изучить содержание разделов лекционного материала.

1. Вход в модуль целесообразно осуществить с помощью графической схемы и информационной таблицы. Граф-схема и информационная таблица определенного раздела математики представляют собой максимально сжатый, компактно составленный справочный материал, который раскрывает основные блоки графической схемы рассматриваемого раздела.

Предложенные методические средства помогают при изучении новой информации увязать различные понятия, теоремы, формулы в единое целое; позволяют проследить логику построения теорий; служат эффективному прохождению всех этапов восприятия, усвоения, обобщения, систематизации и в конечном итоге логической организации новой информации.

2. Изучение теоретической части модуля следует начинать с беглого чтения всей информации. На втором этапе этой познавательной деятельности рекомендуется проработать каждый раздел, отдельные фрагменты при этом разумно параллельно выполнить самостоятельно. На третьем этапе, просмотрев еще раз графическую схему, отработав основные положения теоретической части модуля с помощью информационной таблицы, целесообразно прочитать еще раз весь теоретический материал с целью его целостного восприятия, большей систематизации, логической организации и обобщения.

3. Практическая часть модуля представляет собой методически спроектированные практические занятия. Обратим внимание на наличие обучающих задач, которые дополняют задачи и примеры, приведенные в теоретической части модуля, и создают предпосылки для оптимального овладения соответствующим математическим аппаратом.

4. На выходе из модуля следует еще раз провести обобщение, систематизацию полученных знаний путем повторного изучения графической схемы, информационной таблицы, глоссария и выводов.

Желаем успехов!

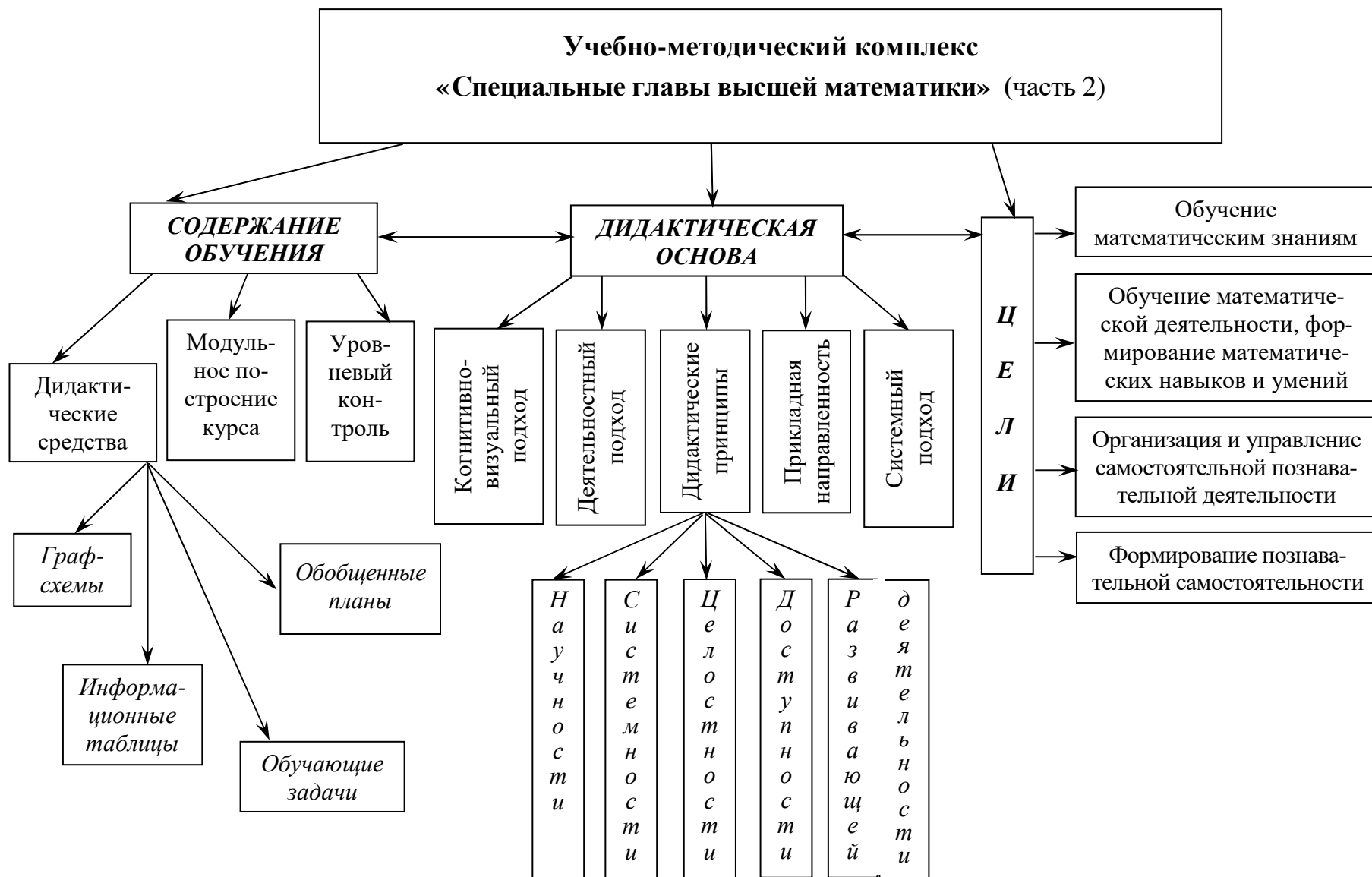


Рис. 1.

УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ 12

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Введение

Понятие поля лежит в основе многих представлений современной физики и техники. В данном учебном модуле рассматриваются скалярные и векторные поля, их основные числовые и векторные характеристики (градиент, производная по направлению, поток, дивергенция, ротор, циркуляция и другие), которые являются удобными математическими «инструментами» изучения этих полей. К математическому моделированию с помощью представленного в модуле аппарата приводят многие задачи физики, механики, гидромеханики, гидравлики, электротехники и т.д.

ДИДАКТИЧЕСКИЕ ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ

<i>Студент должен знать</i>	<i>Студент должен уметь</i>
<ul style="list-style-type: none">– основные определения, связанные с понятиями скалярных и векторных полей;– основные скалярные и векторные характеристики скалярных полей;– основные скалярные и векторные характеристики векторных полей;– теорему Остроградского – Гаусса;– теорему Стокса;– операторы Гамильтона и Лапласа;– потенциальное, соленоидальное и гармоническое векторные поля	<ul style="list-style-type: none">– пользоваться основными определениями, связанными с понятиями скалярных и векторных полей;– вычислять основные характеристики скалярных полей;– вычислять основные характеристики векторных полей;– применять к вычислению потока теорему Остроградского – Гаусса;– применять к вычислению циркуляции теорему Стокса;– применять в процессе изучения физических полей операторы Гамильтона и Лапласа;– определять потенциальное, соленоидальное и гармоническое векторные поля

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА МОДУЛЯ

Номер раздела, темы	Название раздела, темы, перечень изучаемых вопросов	Количество аудиторных часов		Литература	Форма контроля знаний
	Модуль 12. Элементы теории поля	8	8		
12.1	Основные понятия векторного анализа. Поток векторного поля через поверхность	2		8–18	
12.1	Основные понятия векторного анализа. Поток векторного поля через поверхность		2		ИДЗ
12.2	Дивергенция векторного поля. Теорема Остроградского-Гаусса	2		8–18	
12.2	Дивергенция векторного поля. Теорема Остроградского-Гаусса		2		ИДЗ
12.3	Циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля. Теорема Стокса	2		8–18	
12.3	Циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля. Теорема Стокса		2		ИДЗ
12.4	Операторы Гамильтона и Лапласа. Потенциальное и соленоидальное векторные поля	2		8–18	
12.4	Операторы Гамильтона и Лапласа. Потенциальное и соленоидальное векторные поля		2		ИДЗ

Принятые сокращения:

ИДЗ – индивидуальное домашнее задание.

ГРАФИЧЕСКАЯ СХЕМА МОДУЛЯ



ИНФОРМАЦИОННАЯ ТАБЛИЦА «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ»

Основная математическая информация из других учебных модулей

1. Производная по направлению вектора \vec{S} функции $U = U(x, y, z)$ в точке M_0 определяется по формуле

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{S}} = \frac{\partial U(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U(M_0)}{\partial z} \cos \gamma,$$

где $\vec{S}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ – единичный вектор, соответствующий \vec{S} .

2. Градиентом дифференцируемой функции $U = U(x, y, z)$ в точке M называется вектор, имеющий координаты $\frac{\partial U(M)}{\partial x}, \frac{\partial U(M)}{\partial y}, \frac{\partial U(M)}{\partial z}$ и обозначаемый $\overline{\text{grad}} U(M)$: $\overline{\text{grad}} U(M) = \frac{\partial U(M)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U(M)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U(M)}{\partial z} \vec{k}$.

Таким образом, $\frac{\partial U}{\partial \vec{S}} = \overline{\text{grad}} U(M) \cdot \vec{S}_0$. При условии $\overline{\text{grad}} U(M) \neq \vec{0}$ производная $\frac{\partial U(M)}{\partial \vec{S}}$ принимает свое максимальное значение, если направление \vec{S} совпадает с направлением градиента функции $U(M)$.

3. Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области (D) называется конечный предел интегральной суммы при $\lambda \rightarrow 0$, где λ – наибольший из диаметров элементарных областей ΔS_i . Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области (D) , то она интегрируема в этой области:

$$\iint_{(D)} f(x, y) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i.$$

Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx,$$

где область (D) правильно ориентирована относительно оси Oy или оси Ox .

Если область (D) является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат $(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d)$, то

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(D)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$

4. Тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области (V) называется конечный предел ее интегральной суммы при $\lambda \rightarrow 0$. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в ограниченной области, то указанный предел \exists и конечен (он не зависит от способа разбиения области (V) на элементарные части и от выбора точек M_i).

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i,$$

где λ – наибольший диаметр элементарных тел (ΔV_i) .

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{(D_{xy})} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \\ &= \iint_{(D_{xz})} dx dz \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy = \iint_{(D_{yz})} dy dz \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx, \end{aligned}$$

где область (V) правильно ориентирована относительно оси Oz или оси Oy , или оси Ox .

Если область (V) представляет собой прямоугольный параллелепипед: $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, k \leq z \leq e$, то

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_k^e f(x, y, z) dz.$$

Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах ρ, φ, h

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(V)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, h) \rho d\rho d\varphi dh.$$

Вычисление тройного интеграла в сферических координатах ρ, φ, θ

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(V)} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

5. Криволинейным интегралом первого рода (КРИ-I) по дуге кривой (L) от функции $f(x, y, z)$ называется предел интегральной суммы

$$\int_{(L)} f(x, y, z) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta l_i,$$

где λ – наибольший по длине отрезок Δl_i разбиения (L) на части.

На кривой (L) , целиком лежащей в плоскости xOy , функция f от координаты z не зависит, поэтому $\int_{(L)} f(x, y) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta l_i$.

Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления пути интегрирования. Вычисление КРИ-I сводится к вычислению определенного интеграла.

Если пространственная кривая (L) задана параметрическими уравнениями:

$$(L): \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta), \text{ то}$$

$$\int_{(L)} f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt.$$

Если (L) лежит в плоскости xOy , то

$$\int_{(L)} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt.$$

Если плоская кривая задана уравнением $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$), то

$$\int_{(L)} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Если плоская кривая задана уравнением $x = x(y)$ ($c \leq y \leq d$), то

$$\int_{(L)} f(x, y) dl = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + x'^2} dy.$$

Если кривая задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$), то

$$\int_{(L)} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi.$$

6. Криволинейным интегралом второго рода (КРИ-II) по координатам называется предел соответствующей интегральной суммы

$$\begin{aligned} \int_{(L)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (P(M_i) \Delta x_i + Q(M_i) \Delta y_i + R(M_i) \Delta z_i), \end{aligned}$$

где λ – длина наибольшей из проекций Δl_i на оси координат Δx_i , Δy_i , Δz_i .

На кривой (L) , целиком лежащей в плоскости xOy ,

$$\int_{(L)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (P(x_i, y_i) \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \Delta y_i).$$

Криволинейный интеграл второго рода зависит от выбора направления обхода кривой

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = - \int_{BA} P dx + Q dy + R dz.$$

Вычисление КРИ-II также сводится к вычислению определенного интеграла.

Если пространственная линия (L) задана параметрически, то

$$\begin{aligned} \int_{(L)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + \\ + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)) dt. \end{aligned}$$

Если плоская кривая (L) задана параметрически, то

$$\int_{(L)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)) dt.$$

Если плоская кривая задана уравнением $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$), то

$$\int_{(L)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)) dx.$$

Если плоская кривая задана уравнением $x = x(y)$ ($c \leq y \leq d$), то

$$\int_{(L)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_c^d (P(x(y), y) x'(y) + Q(x(y), y)) dy.$$

Если функции P, Q, R рассматривать как проекции некоторой переменной силы \vec{F} на координатные оси, то КРИ-П выражает работу этой силы, точка приложения которой описывает кривую (L) .

$$A = \int_{(L)} P dx + Q dy + R dz.$$

7. Поверхностным интегралом первого рода (ПОВИ-I) от функции $f(x, y, z)$ по поверхности (σ) называется предел соответствующей интегральной суммы:

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta\sigma_i,$$

где λ – наибольший из диаметров частичных областей $\Delta\sigma_i$.

Если поверхность (σ) задана уравнением $z = z(x, y)$, то

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{(D_{xy})} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy.$$

Если поверхность (σ) задана уравнением $y = y(x, z)$, то

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{(D_{xz})} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2} dx dz.$$

Если поверхность (σ) задана уравнением $x = x(y, z)$, то

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{(D_{yz})} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} dy dz.$$

8. Поверхностным интегралом второго рода (ПОВИ-II) от функции $f(x, y, z)$ по поверхности (σ) называется предел интегральной суммы

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i,$$

где λ – наибольший из диаметров элементарных областей $(\Delta\sigma_i)$; (ΔS_i) – проекции частей $(\Delta\sigma_i)$ на плоскость xOy .

Наиболее общим видом КРИ-II является интеграл

$$\iint_{(\sigma)} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy,$$

где P, Q, R – непрерывные функции в точках двухсторонней поверхности (σ) .

Если поверхность (σ) однозначно проецируется в область (D_{xy}) , то

$$\iint_{(\sigma)} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{(D_{xy})} R(x, y, z(x, y)) dx dy,$$

где знак «+» берется, если на выбранной стороне поверхности $\cos \gamma > 0$, и знак «-», когда $\cos \gamma < 0$.

Аналогично

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} Q(x, y, z) dx dz &= \pm \iint_{(D_{xz})} Q(x, y(x, z), z) dx dz, \\ \iint_{(\sigma)} P(x, y, z) dy dz &= \pm \iint_{(D_{yz})} P(x(y, z), y, z) dy dz, \end{aligned}$$

где (D_{xz}) и (D_{yz}) – проекции (σ) на плоскости xOz и yOz , в первой формуле берется знак $\cos \beta$, во второй $\cos \alpha$; $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – направляющие косинусы вектора нормали к выбранной стороне поверхности.

Основные положения и формулы теории поля

1. Пусть (V) – область в пространстве или на плоскости. Говорят, что в области (V) задано **скалярное поле**, если любой точке M из (V) поставлено в соответствие число $U(M)$. Если в пространстве или на плоскости введены декартовы прямоугольные координаты, то скалярное поле можно представить в виде функции координат точки M : $U = U(x, y, z)$ или $U = U(x, y)$.

2. **Поверхностью уровня** скалярного поля $U(M)$ называется геометрическое место точек, в которых поле имеет данное фиксированное значение $C = \text{const}$. Уравнение поверхности уровня имеет вид $U(x, y, z) = C$, если поле задано в пространстве, и $U = U(x, y) = C$, если поле задано на плоскости.

3. Если некоторой точке M области (V) поставлен в соответствие вектор $\vec{a}(M)$, то говорят, что в (V) задано **векторное поле**. В декартовой прямоугольной системе координат векторное поле $\vec{a}(M)$ можно представить совокупностью трех скалярных функций, являющихся его координатами:

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

4. **Векторной линией (силовой линией, линией тока)** векторного поля $\vec{a}(M)$ называется линия (L) , лежащая в области (V) , в каждой точке которой направление касательной к ней совпадает с направлением $\vec{a}(M)$ в этой точке. Часть пространства, в котором задано векторное поле $\vec{a}(M)$, ограниченная некоторой поверхностью (σ) , называется **векторной трубкой**, если в каждой точке поверхности (σ) нормаль к ней ортогональна $\vec{a}(M)$ в этой же точке.

5. **Потоком Π векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхность (σ)** в сторону, определяемую единичным вектором нормали \vec{n}_0 к поверхности (σ) , называют предел суммы элементарных потоков через частичные области, на которые разбивается область (σ) , когда число частичных областей неограниченно возрастает, при условии, что длина наибольшего из диаметров разбиения неограниченно убывает.

Пусть векторное поле задано в декартовой системе координат: $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ и $\vec{n}_0(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ – единичный вектор нормали.

Тогда поток векторного поля

$$\begin{aligned} \Pi &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{a} \cdot \bar{n}_0 \cdot \Delta \sigma_i = \iint_{(\sigma)} \bar{a} \cdot \bar{n}_0 d\sigma = \\ &= \iint_{(\sigma)} (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) d\sigma = \\ &= \iint_{(\sigma)} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dxdz + R(x, y, z) dxdy \end{aligned}$$

За направление единичной нормали \bar{n}_0 , как правило, берут направление внешней нормали.

6. Физический смысл потока векторного поля

Поток векторного поля есть разность между количеством жидкости, вытекающей из объема (V) в единицу времени, и количеством жидкости, втекающей в этот объем за тоже время.

7. Предел средней удельной обильности при стремлении объема ΔV к нулю и стягивании этого объема в точку M называется дивергенцией

векторного поля \bar{a} . Таким образом, $\operatorname{div} \bar{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{(\sigma)} \bar{a} \cdot \bar{n}_0 d\sigma}{\Delta V}$.

Если $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ – непрерывны вместе со своими частными производными в области (V), то $\operatorname{div} \bar{a}$ существует во всех точках области (V) и в ДПСК выражается формулой

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

ТЕОРЕМА (Остроградского – Гаусса). Пусть в *замкнутой* области (V), ограниченной *замкнутой* поверхностью (σ) , задано векторное поле $\bar{a}(M) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$. Если в области (V) координатные функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими первыми частными производными во всей области (V), включая ее границу, то имеет место формула Остроградского – Гаусса

$$\oiint_{(\sigma)} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz,$$

в которой поверхностный интеграл вычисляется по внешней стороне замкнутой поверхности (σ) .

8. Пусть векторное поле задано на кусочно-гладкой линии (L) непрерывной вектор-функцией $\bar{a}(M) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$. Криволинейный интеграл $\int_{(L)} \bar{a}(M) \cdot d\bar{r} = \int_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz$ в теории поля называется **линейным интегралом** вектора. Причем $d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$ – вектор, принадлежащий касательной $\bar{\tau}$ к кривой (L) в направлении ее обхода. В случае замкнутой кривой этот интеграл называется **циркуляцией** поля вектора \bar{a} по контуру (L) и обозначается

$$C = \oint_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz = \oint_{(L)} \bar{a} \cdot d\bar{r}.$$

ТЕОРЕМА (Стокса). Пусть (σ) – гладкая ориентируемая поверхность, а (L) – замкнутая гладкая кривая, являющаяся границей поверхности (σ) . Пусть векторное поле $\bar{a}(M) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$ непрерывно дифференцируемо на (σ) и (L) . Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \oint_{(L)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ & = \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned}$$

в котором поверхностный интеграл вычисляется по внешней стороне замкнутой поверхности (σ) . Направление контура (L) и сторона поверхности (σ) согласуются по следующему правилу: вектор нормали к поверхности (σ) направлен так, чтобы видимый из его конца обход контура совершался **против часовой стрелки**.

9. Ротором (вихрем) векторного поля называется вектор

$$\overline{\text{rot} \bar{a}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \bar{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \bar{j} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k}.$$

10. Оператор Гамильтона (оператор набла) по определению записывают в виде символического вектора: $\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$. С учетом оператора Гамильтона основные операции теории поля можно записать следующим образом: $\overline{\text{grad} u} = \bar{\nabla} u$, $\text{div} \bar{a} = \bar{\nabla} \cdot \bar{a}$, $\overline{\text{rot} \bar{a}} = \bar{\nabla} \times \bar{a}$.

11. Оператор $\bar{\nabla}^2$ обозначают Δ и называют **оператором Лапласа** (лапласианом). Уравнение $\Delta U = 0$ называют **уравнением Лапласа**, а поле, удовлетворяющее уравнению Лапласа, – **полем Лапласа или гармоническим полем**. Лапласиан скалярного поля $U = U(x, y, z)$ имеет вид

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

12. Векторное поле называется **безвихревым (потенциальным)**, если в каждой точке пространства или рассматриваемой области вихрь равен нулю $\overline{\text{rot} \vec{a}} = 0$.

13. Векторное поле называется **трубчатым или соленоидальным**, если в некоторой точке этого поля дивергенция равна нулю $\text{div} \vec{a} = 0$.

14. Векторное поле, являющееся одновременно и **соленоидальным**, и **потенциальным**, называется **гармоническим или лапласовым**.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

12.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ

Определение 12.1.1. Пусть (V) – область в пространстве или на плоскости. Говорят, что в области (V) задано *скалярное поле*, если любой точке M из (V) поставлено в соответствие число $U(M)$.

Замечание 12.1.1. Таким образом, понятие скалярного поля сводится к понятию функции в точке (функции скалярного аргумента). Если в пространстве или на плоскости введена декартова прямоугольная система координат, то скалярное поле можно представить в виде функции координат точки M : $U = U(x, y, z)$ или $U = U(x, y)$.

Ограничимся рассмотрением полей, в которых U не зависит от времени. Такие поля принято называть стационарными. В общем случае скалярное поле может быть и нестационарным, т.е. может изменяться не только от точки к точке, но и с течением времени.

Примерами скалярных полей являются поле температур нагретого тела, поле давлений, поле освещенности, поле плотности электрического заряда и т.п.

Графически скалярные поля изображаются с помощью поверхностей или линий уровня.

Определение 12.1.2. *Поверхностью уровня* скалярного поля $U(M)$ называется геометрическое место точек, в которых поле принимает данное фиксированное значение C . Уравнение поверхности уровня имеет вид $U(x, y, z) = C$, если поле задано в пространстве, и $U(x, y) = C$, если поле задано на плоскости.

Примером поверхностей уровня могут служить эквипотенциальные поверхности в электростатическом поле. В поле потенциала точечного электрического заряда $U = \frac{q}{r} = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ поверхностями уровня являются концентрические сферы:

$$U = \frac{q}{r} = c \Rightarrow r = \frac{q}{c}, \quad (c \neq 0) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{q^2}{c^2}.$$

Линиями уровня плоского поля $U = x^2 - 2y$ являются параболы $x^2 - 2y = c$.

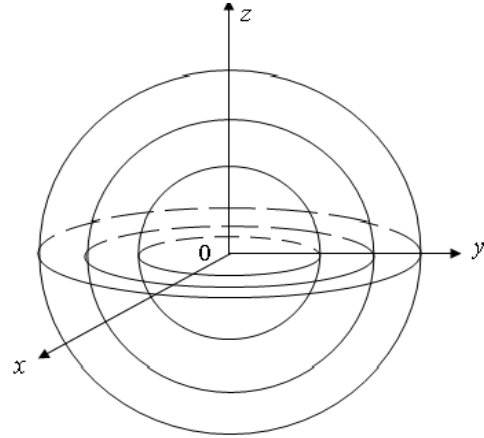
Пример 12.1.1. Найти поверхности уровня поля температур нагретого тела, заданного в ДПСК уравнением

$$U(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Решение.

Составим уравнения поверхностей уровня

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = C \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = C^2.$$



В результате имеем уравнения сфер с центром в начале координат и радиусом, равным C , которые можно изобразить графически.

Замечание 12.1.2. Ранее в учебном модуле «Функции нескольких переменных» [10] нами были введены и рассмотрены важнейшие локальные соответственно **векторная** и **скалярная** характеристики – инструменты исследования скалярных полей математическими средствами:

1) **градиент** скалярного поля:

$$\overline{\text{grad}U} = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k};$$

2) **производная** поля $U(M)$ по направлению вектора \vec{a} :

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \cos \gamma,$$

где направляющие косинусы вектора \vec{a} определяются по формулам:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Замечание 12.1.3. Обратим внимание, что понятие градиента скалярных полей используется при изучении различных природных явлений. Например, *градиент концентрации* – нарастание по какому-либо направлению концентрации растворенного вещества, *градиент температуры* – увеличение по направлению температуры среды и т.д. Градиент может быть вызван различными причинами (механическим препятствием, действием электромагнитных, гравитационных или других полей), а также различием в растворяющей способности граничащих фаз (октанол/вода). Обозначение grad предложил Максвелл. Термин впервые появился в метеорологии, а в математику был введен Максвеллом в 1873 г.

Замечание 12.1.4. Производная по направлению $\frac{\partial U}{\partial \bar{a}}$ характеризует скорость изменения величины скалярного поля $U(M)$ в точке M_0 в направлении вектора \bar{a} . Если значение производной в направлении заданного вектора положительно, то скалярное поле в этом направлении возрастает, если это значение отрицательно – убывает.

Градиент направлен в сторону возрастания поля. Длина градиента равна наибольшей производной по направлению в данной точке скалярного поля. Таким образом, **градиент скалярного поля в заданной точке указывает направление максимального его возрастания в этой точке.** Очевидно, что в антиградиентном направлении (противоположном направлению градиента) исследуемое поле будет с наибольшей скоростью убывать. В этом состоит важный физический смысл указанной векторной характеристики скалярных полей.

Градиент скалярного поля направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку.

Упражнение 1.

1. Найти величину и направление градиента скалярного поля $U = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ в точке $M_0(2, 1, -1)$.

2. Найти $\frac{\partial U}{\partial \bar{a}}$ в точке M_0 , если $\bar{a} = (2, -1, -2)$.

12.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

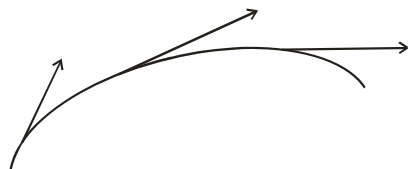
Определение 12.2.1. Пусть (V) – область в пространстве или на плоскости. Говорят, что в области (V) задано **векторное поле**, если любой точке M из (V) поставлен в соответствие вектор $\bar{a}(M)$.

Замечание 12.2.1. В декартовой прямоугольной системе координат векторное поле $\bar{a}(M)$ можно представить совокупностью трех скалярных функций, являющихся его координатами:

$$\bar{a}(M) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}.$$

Примерами векторных полей могут служить поле градиента любого скалярного поля, поле тяготения, электростатическое поле, поле скоростей текущей жидкости, поле радиусов-векторов точек пространства и т.п.

Определение 12.2.2. Векторной линией (силовой линией, линией тока) векторного поля $\vec{a}(M)$ называется линия (L), лежащая в области (V), в каждой точке которой направление касательной к ней совпадает с направлением $\vec{a}(M)$ в этой точке.



Замечание 12.2.2. Векторные линии в поле скоростей текущей жидкости представляют собой линии тока этой жидкости, т.е. линии, по которым движутся частицы жидкости. В электрическом поле векторными линиями являются силовые линии этого поля. В поле точечного заряда такими линиями будут лучи, выходящие из заряда. Для магнитного поля векторными (силовыми) линиями будут линии, выходящие из северного полюса в направлении южного полюса.

Замечание 12.2.3. Из определения векторных линий следует, что вектор $\vec{a}(M)$ и вектор $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$, который направлен по касательной в точке M , должны быть коллинеарными для каждой точки этой линии. Отсюда следует требование пропорциональности соответствующих координат этих векторов:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \quad (12.2.1).$$

Уравнения векторных линий могут быть найдены также из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} = R(x, y, z). \end{cases} \quad (12.2.2)$$

Пример 12.2.1. Найти векторные линии поля

$$\vec{a} = (z - 2y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (2y - x)\vec{k}.$$

Решение.

Для заданного поля имеем $P(x, y, z) = z - 2y$, $Q(x, y, z) = x - z$, $R(x, y, z) = 2y - x$. Тогда с учетом (12.2.2) запишем уравнения векторных линий $\frac{dx}{z - 2y} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{2y - x}$. В результате получим систему двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} = \frac{z - 2y}{y - x}; \\ \frac{dy}{dz} = \frac{x - z}{2y - x}. \end{cases} \quad (12.2.3)$$

Сложим правые и левые части системы (12.2.3):

$$\frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} = \frac{z - 2y + x - z}{2y - x} = \frac{-2y + x}{2y - x} = -1.$$

Таким образом, приходим к дифференциальному уравнению $dx + dy + dz = 0$, интегрирование которого приводит к уравнению $x + y + z = c$, определяющему множество параллельных плоскостей.

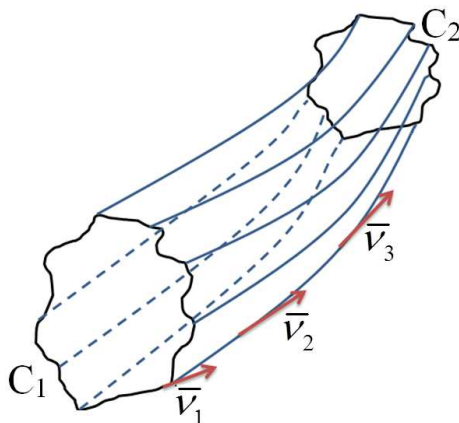
Умножая первое уравнение (12.2.3) на x , второе – на $2y$, затем складывая их между собой, получим

$$\frac{xdx}{dz} + \frac{2ydy}{dz} = \frac{x(z - 2y) + 2y(x - z)}{2y - x} = \frac{z(-2y + x)}{2y - x} = -z.$$

Следствием последнего уравнения будет дифференциальное уравнение $xdx + 2ydy + zdz = 0$, интегрирование которого приводит к уравнению $\frac{x^2}{2} + y^2 + \frac{z^2}{2} = r^2$ или $\frac{x^2}{2r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{2r^2} = 1$. Таким образом, искомые векторные линии представляют собой эллипсы, образованные пересечением плоскостей $x + y + z = c$ и эллипсоидов с центром в начале координат и полуосями $a = \sqrt{2} \cdot r, b = r, c = r \cdot \sqrt{2}$ ($r = \text{const}$).

Определение 12.2.3. Часть пространства, в котором задано векторное поле $\vec{a}(M)$, ограниченная некоторой поверхностью (σ) , называется **векторной трубкой**, если в каждой точке поверхности (σ) нормаль к ней ортогональна $\vec{a}(M)$ в этой же точке.

Замечание 12.2.4. Таким образом, векторная трубка – часть пространства, состоящая из векторных линий, каждая из которых или целиком лежит внутри векторной трубки или целиком находится вне ее.



Если $\vec{a}(M)$ – поле скоростей движущейся жидкости, то векторная трубка представляет собой ту часть пространства, которую займет при своем перемещении некоторый фиксированный объем жидкости.

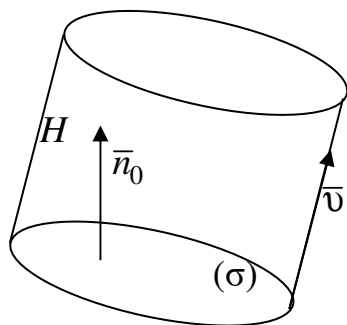
12.3. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Задача. Пусть дана пространственная область, заполненная жидкостью, движущейся со скоростью $\vec{v} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Требуется вычислить количество жидкости Π , протекающей через заданную ограниченную кусочно-гладкую ориентированную двустороннюю поверхность (σ) в единицу времени (поверхность считается ориентированной, если указано направление нормали к этой поверхности).

Решение.

Рассмотрим следующие возможные ситуации:

1. Пусть скорости всех частиц стационарно текущей жидкости одинаковы и поверхность представляет собой ограниченную часть плоскости.



Обозначим через Π объем жидкости, протекающий в единицу времени через площадку (σ) . Очевидно, что этот объем равен объему V цилиндра с основанием (σ) и образующей $|\vec{v}|$. Как известно, $V = \sigma \cdot H$, где σ – площадь площадки; H – высота цилиндра (проекция вектора \vec{v} на еди-

ничный вектор \bar{n}_0 – нормали к площадке (σ)). Так как $H = \bar{v} \cdot \bar{n}_0$, то, следовательно, $\Pi = \sigma \cdot \bar{v} \cdot \bar{n}_0$.

Рассмотренный объем принято называть потоком жидкости через область (σ).

2. Пусть теперь имеем произвольную ограниченную кусочно-гладкую ориентированную двустороннюю поверхность (σ), а скорости частиц стационарно протекающей через нее жидкости различны и задают векторное поле $\bar{v} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$.

Для вычисления количества жидкости Π , протекающей в единицу времени через (σ), разобьем заданную поверхность на элементарные части ($\Delta\sigma_i$). Внутри каждой элементарной части ($\Delta\sigma_i$) выделим некоторую точку M_i и в ней построим единичный вектор \bar{n}_0 . Учитывая результат, полученный в п. 1, будем иметь, что величина $\Delta\Pi_i = \Delta\sigma_i \cdot \bar{v} \cdot \bar{n}_0$ выражает элементарный поток частичной области ($\Delta\sigma_i$). Обозначим d_i – диаметр ($\Delta\sigma_i$), $\lambda = \max\{d_i\}$.

Тогда $\Pi \approx \sum_{i=1}^n \Delta\Pi_i$ и окончательно

$$\Pi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta\Pi_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i \cdot \bar{v} \cdot \bar{n}_0$$

будет выражать все количество жидкости, протекающей через (σ) в единицу времени.

Абстрагируясь от физического смысла полученной в рассмотренной задаче величины, введем новое, важное для теории поля понятие.

Определение 12.3.1. *Потоком векторного поля $\bar{a}(M)$ через поверхность (σ) в сторону, определяемую единичным вектором \bar{n}_0 нормали к поверхности (σ), называют предел суммы элементарных потоков через частичные области, на которые разбивается область (σ), когда число частичных областей неограниченно возрастает при условии, что длина наибольшего из диаметров разбиения неограниченно убывает. При этом предполагается, что указанный предел существует, не зависит ни от способа разбиения на частичные области, ни от способа выбора точек внутри него, ни от способа стремления диаметров разбиения к нулю.*

Пусть векторное поле задано в декартовой системе координат: $\bar{a}(M) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$. С учетом координат единич-

ного вектора нормали $\bar{n}_0(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ и сведений из интегрального исчисления будем иметь

$$\begin{aligned} \Pi &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{a}(M) \cdot \bar{n}_0 \cdot \Delta\sigma_i = \iint_{(\sigma)} \bar{a}(M) \cdot \bar{n}_0 d\sigma = \\ &= \iint_{(\sigma)} (P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma) d\sigma = \quad (12.3.1) \\ &= \iint_{(\sigma)} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy. \end{aligned}$$

Замечание 12.3.1. За направление единичной нормали \bar{n}_0 в формуле (12.3.1), как правило, берут направление внешней нормали. Равенство поверхностных интегралов в формуле (12.3.1) устанавливает связь между ПОВИ-I и ПОВИ-II.

Замечание 12.3.2. Для замкнутой поверхности поток векторного поля имеет следующий физический смысл: в точках, где векторные линии выходят из объема (V) (жидкость вытекает), внешняя нормаль образует с вектором поля \bar{n}_0 острый угол и, следовательно, $\bar{v} \cdot \bar{n}_0 > 0$. В точках, где векторные линии входят в объем (V) (жидкость втекает), внешняя нормаль \bar{n}_0 образует с \bar{v} тупой угол, следовательно, $\bar{v} \cdot \bar{n}_0 < 0$. Значит, поток векторного поля есть разность между количеством жидкости, вытекающей из объема (V) в единицу времени, и количеством жидкости, втекающей в этот объем за то же время.

Если жидкость несжимаема, то при $\Pi > 0$ объем вытекающей жидкости больше, чем объем втекающей жидкости. Это означает, что внутри области имеются дополнительные источники. При $\Pi < 0$ объем втекающей жидкости будет превышать объем вытекающей жидкости и внутри области часть жидкости поглощается (имеются дополнительные стоки). При $\Pi = 0$ втекает и выделяется одинаковое количество жидкости.

Точки, где векторные линии начинаются, называются источниками, а точки, где эти линии заканчиваются, – стоками; при $\Pi < 0$ стоков больше. Таким образом, поток векторного поля является суммарной характеристикой обильности источников и стоков той части этого поля, которая ограничена рассматриваемой замкнутой поверхностью.

Замечание 12.3.3. Если поверхность (σ) задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, то единичный вектор нормали можно определить согласно формуле

$$\bar{n}_0 = \pm \frac{\overline{\text{grad} F}}{|\overline{\text{grad} F}|} = \pm \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \bar{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}. \quad (12.3.2)$$

Знак в правой части выбирается так, чтобы получить нормальный вектор \bar{n}_0 именно к выбранной стороне поверхности.

Замечание 12.3.4. В случае явного задания поверхности (σ) , т.е. уравнением $z = f(x, y)$, единичный вектор нормали можно определить согласно формуле

$$\bar{n}_0 = \pm \frac{-\frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}. \quad (12.3.3)$$

Знак «+» соответствует выбору верхней стороны поверхности, нормаль к которой образует острый угол с осью Oz , и, следовательно, $\cos \gamma > 0$, т.е. коэффициент при \bar{k} в формуле (12.3.3) является положительным. Знак «−» отвечает выбору нижней стороны поверхности, нормаль к которой образует тупой угол с осью Oz , и, следовательно, $\cos \gamma < 0$, т.е. коэффициент при \bar{k} в формуле (12.3.3) является отрицательным.

Замечание 12.3.5. Если поверхность (σ) взаимно однозначно проектируется на плоскость xOy в область (D_{xy}) , то вычисление потока векторного поля \bar{a} через поверхность (σ) сводится к вычислению двойного интеграла по области (D_{xy}) по формуле

$$P = \iint_{(\sigma)} \bar{a} \cdot \bar{n}_0 d\sigma = \iint_{(D_{xy})} \left. \frac{\bar{a} \cdot \bar{n}_0}{|\cos \gamma|} \right|_{z=f(x,y)} dx dy, \quad (12.3.4)$$

где $\cos \gamma$ – коэффициент при \bar{k} в формулах для вектора нормали.

Замечание 12.3.6. Аналогично, если поверхность (σ) взаимно однозначно проектируется на плоскость yOz или zOx , поток вычисляется по формулам:

$$P = \iint_{(\sigma)} \bar{a} \cdot \bar{n}_0 d\sigma = \iint_{(D_{yz})} \left. \frac{\bar{a} \cdot \bar{n}_0}{|\cos \alpha|} \right|_{x=f(y,z)} dy dz,$$

$$P = \iint_{(\sigma)} \bar{a} \cdot \bar{n}_0 d\sigma = \iint_{(D_{xz})} \left. \frac{\bar{a} \cdot \bar{n}_0}{|\cos \beta|} \right|_{y=f(x,z)} dx dz.$$

Замечание 12.3.7. В более сложных ситуациях, когда поверхность (σ) состоит из объединения нескольких поверхностей (σ_1) , (σ_2) и т.д., однозначно проектируемых на соответствующие плоскости, применяется свойство аддитивности интегралов по фигуре

$$\Pi = \iint_{(\sigma)} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 d\sigma = \iint_{(\sigma_1)} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 d\sigma + \iint_{(\sigma_2)} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 d\sigma + \dots$$

Пример 12.3.1. По закону Кулона, заряд $q > 0$ создает силовое поле $\vec{F} = k \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{e}$, где r – длина радиуса-вектора точки, $|\vec{e}| = 1$. Найти поток заданного силового поля через сферу радиуса R , если заряд находится в центре сферы.

Решение.

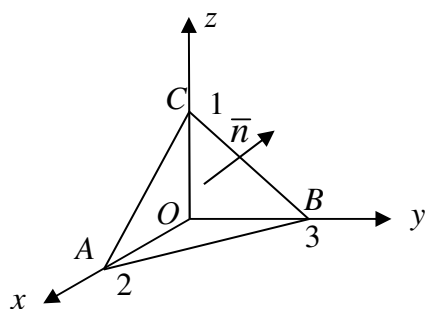
Согласно формуле (12.3.1) имеем

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{(\sigma)} \vec{F} \cdot \vec{n}_0 d\sigma = \\ &= \iint_{(\sigma)} k \frac{q}{r^2} \vec{e} \cdot \vec{n}_0 d\sigma = \left| r = R, \vec{e} \parallel \vec{n}_0 \Rightarrow \vec{e} \cdot \vec{n}_0 = |\vec{e}| \cdot |\vec{n}_0| \cdot \cos 0 = 1 \right| = \\ &= k \frac{q}{R^2} \iint_{(\sigma)} d\sigma = k \frac{q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi kq. \end{aligned}$$

Пример 12.3.2. Найти поток векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + 3z\vec{j} + y\vec{k}$ через верхнюю часть плоскости $3x + 2y + 6z = 6$, расположенную в октанте $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Решение.

Изобразим заданную часть плоскости. Для определения искомого потока воспользуемся формулой



$$\Pi = \iint_{(\sigma)} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 d\sigma = \iint_{(D_{xy})} \left. \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}_0}{|\cos \gamma|} \right|_{z=f(x,y)} dx dy.$$

Поверхность (σ) представляет собой $\triangle ABC$. Треугольник ABC однозначно проектируется, например, на плоскость xOy . Учитывая, что неявное уравнение поверхности $\triangle ABC$ имеет вид

$F(x, y, z) = 3x + 2y + 6z - 6 = 0$, найдем единичный вектор нормали к плоскости $\triangle ABC$. Вектор нормали к поверхности $\triangle ABC$, очевидно, имеет вид $\vec{n} = (3, 2, 6)$. Вычислим его длину: $|\vec{n}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = 7$, тогда легко определяется единичный вектор нормали $\left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)$.

Отсюда имеем $\cos \gamma = \frac{6}{7} > 0$, что и соответствует внешней стороне треугольника. Определим

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{n}_0}{|\cos \gamma|} = \left(\frac{3}{7}x + \frac{2}{7} \cdot 3z + \frac{6}{7}y \right) \cdot \frac{1}{\frac{6}{7}} = \frac{1}{6}(3x + 6z + 6y).$$

Из уравнения плоскости треугольника выразим $6z = 6 - 3x - 2y$, тогда $\frac{\vec{a} \cdot \vec{n}_0}{|\cos \gamma|} = \frac{1}{6}(3x + 6 - 3x - 2y + 6y) = \frac{1}{6}(6 + 4y)$.

Так как проекция плоскости треугольника ABC на плоскость xOy есть треугольник AOB , то по формуле (12.3.4), найдем поток поля

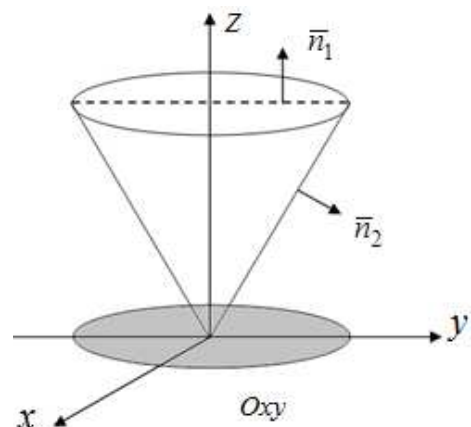
$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{(\sigma)} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 d\sigma = \iint_{(D_{xy})} \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}_0}{|\cos \gamma|} \Big|_{z=f(x,y)} dx dy = \iint_{(D_{xy})} \frac{1}{6}(6 + 4y) dx dy = \\ &= \frac{1}{6} \iint_{(D_{xy})} (6 + 4y) dx dy = \frac{1}{6} \int_0^3 (6 + 4y) dy \int_0^{\frac{6-2y}{3}} dx = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^3 (6 + 4y) \left(\frac{6-2y}{3} \right) dy = \frac{1}{9} \int_0^3 (18 + 6y - 4y^2) dy = 5. \end{aligned}$$

Пример 12.3.3. Найти поток поля радиуса-вектора \vec{r} через внешнюю сторону прямого конуса с радиусом основания R и высотой H , если его вершина совпадает с началом координат.

Решение.

Изобразим заданный конус.

Поверхность конуса состоит из боковой поверхности, однозначно проектируемой на плоскость xOy в круг радиуса R , и плоскости



основания, также однозначно проектируемой на плоскость xOy в круг радиуса R . Воспользуемся свойством аддитивности интегралов по фигуре.

$$\text{Будем иметь } \Pi = \iint_{(\sigma)} \vec{r} \cdot \vec{n}_0 d\sigma = \iint_{(\text{бок.пов.})} \vec{r} \cdot \vec{n}_0 d\sigma + \iint_{(\text{осн.})} \vec{r} \cdot \vec{n}_0 d\sigma. \text{ Так как}$$

во всех точках боковой поверхности конуса единичный вектор нормали перпендикулярен \vec{r} , то для боковой поверхности конуса $\vec{r} \cdot \vec{n}_0 = 0$. Отсюда

$$\iint_{(\text{бок.пов.})} \vec{r} \cdot \vec{n}_0 d\sigma = 0. \text{ Для основания конуса имеем } \vec{n}_0 = (0, 0, 1), \vec{r} = (x, y, H).$$

$$\text{Значит, } \vec{r} \cdot \vec{n}_0 = H. \text{ Следовательно, } \iint_{(\text{осн.})} \vec{r} \cdot \vec{n}_0 d\sigma = H \cdot \iint_{(\text{осн.})} d\sigma = H \cdot \pi R^2.$$

$$\text{Окончательно } \Pi = 0 + \pi R^2 H.$$

12.4. ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО – ГАУССА

Величина потока характеризует наличие в данном объеме как истоков, так и стоков суммарно. Естественным образом возникает необходимость введения более точной характеристики векторного поля (подобно тому, как вводится понятие скорости для характеристики движения, плотности массы или заряда и т.п.). В связи с чем введем сначала понятие, определяющее среднюю плотность потока.

Определение 12.4.1. Отношение потока вектора поля \vec{a} к объему V , ограниченному замкнутой поверхностью (σ) , называется *средней удельной*

$$\text{обильностью} \text{ источников и стоков в объеме } (V): \frac{\iint_{(\sigma)} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 d\sigma}{V}.$$

Разобьем объем (V) на элементарные объемы (ΔV) , тогда имеет место следующее определение.

Определение 12.4.2. Предел средней удельной обильности при стремлении объема ΔV к нулю и стягивании этого объема в точку M называется *дивергенцией* векторного поля \vec{a} .

Таким образом:

$$\text{div } \vec{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{(\sigma)} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 d\sigma}{\Delta V}.$$

Замечание 12.4.1. Дивергенция векторного поля характеризует удельную обильность источника в каждой отдельной точке.

Из определения следует, что дивергенция является скалярной величиной и если $\operatorname{div} \vec{a}(M) > 0$, то точка M является источником, если $\operatorname{div} \vec{a}(M) < 0$ – стоком.

Замечание 12.4.2. Если $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными в области (V) , то $\operatorname{div} \vec{a}(M)$ существует во всех точках области (V) и в ДПСК выражается формулой

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Свойства дивергенции векторного поля:

1. Линейность

$$\operatorname{div} (c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_n \vec{a}_n) = c_1 \operatorname{div} \vec{a}_1 + c_2 \operatorname{div} \vec{a}_2 + \dots + c_n \operatorname{div} \vec{a}_n,$$

где c_1, c_2, \dots, c_n – некоторые константы.

2. Дивергенция постоянного вектора \vec{c} равна нулю: $\operatorname{div} \vec{c} = 0$.

3. $\operatorname{div} (\varphi \vec{a}) = \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \overline{\operatorname{grad} \varphi}$, где $\varphi(x, y, z)$ – скалярная функция.

Замечание 12.4.3. Формула Грина связывает двойной интеграл по плоской области с криволинейным интегралом по контуру области. Аналогом в теории тройных интегралов служит формула Остроградского – Гаусса, связывающая тройной интеграл по пространственной области с поверхностным интегралом по границе области.

Определение 12.4.3. Пространственную связную область (V) будем называть **z-цилиндрической**, если снизу она ограничена кусочно-гладкой поверхностью $(\sigma_1) : z = z_1(x, y)$, сверху – кусочно-гладкой поверхностью $(\sigma_2) : z = z_2(x, y)$ и боковой поверхностью (σ_3) , образующие которой параллельны оси Oz , а направляющей служит кусочно-гладкая замкнутая кривая (L) (с нулевой площадью) на плоскости xOy , ограничивающая область (D_{xy}) – проекцию (V) на плоскость xOy .

Определение 12.4.4. Пространственную связную область (V) будем называть **x-цилиндрической**, если снизу она ограничена кусочно-гладкой поверхностью $(\sigma_1) : x = x_1(y, z)$, сверху – кусочно-гладкой поверхностью $(\sigma_2) : x = x_2(y, z)$ и боковой поверхностью (σ_3) , образующие которой параллельны оси Ox , а направляющей служит кусочно-гладкая

замкнутая кривая (L) (с нулевой площадью) на плоскости yOz , ограничивающая область (D_{yz}) – проекцию (V) на плоскость yOz .

Определение 12.4.5. Пространственную связную область (V) будем называть *у-цилиндрической*, если снизу она ограничена кусочно-гладкой поверхностью $(\sigma_1) : y = y_1(x, z)$, сверху – кусочно-гладкой поверхностью $(\sigma_2) : y = y_2(x, z)$ и боковой поверхностью (σ_3) , образующие которой параллельны оси Oy , а направляющей служит кусочно-гладкая замкнутая кривая (L) (с нулевой площадью) на плоскости xOz , ограничивающая область (D_{xz}) – проекцию (V) на плоскость xOz .

Определение 12.4.6. Пространственную связную область (V) будем называть *простой*, если ее можно разбить как на конечное число *z-цилиндрических* областей, так и на конечное число областей каждого из двух других типов.

ТЕОРЕМА 12.4.1 (Остроградского – Гаусса). Пусть в *замкнутой* области (V), ограниченной *замкнутой* поверхностью (σ) , задано векторное поле $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Если в области (V) координатные функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими первыми частными производными во всей области (V), включая ее границу, то имеет место формула Остроградского-Гаусса

$$\oiint_{(\sigma)} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (12.4.1)$$

в которой поверхностный интеграл вычисляется по внешней стороне замкнутой поверхности (σ) .

Доказательство. 1. Рассмотрим *z-цилиндрическую* пространственную область (V), ограниченную замкнутой поверхностью $(\sigma) = (\sigma_1) \cup (\sigma_2) \cup (\sigma_3)$ (см. **определение 12.4.3**). Пусть (D_{xy}) – проекция (V) на плоскость xOy . Суммирование по поверхности (σ) будем проводить в сторону внешней нормали.

Тогда имеет место очевидное равенство:

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{(D_{xy})} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_{(D_{xy})} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \\ &- \iint_{(D_{xy})} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy = \iint_{(\sigma_2)} R(x, y, z) dx dy + \iint_{(\sigma_1)} R(x, y, z) dx dy. \end{aligned}$$

При этом первый из интегралов распространен на верхнюю сторону поверхности (σ_2) , уравнение которой имеет вид $z = z_2(x, y)$, а второй – на нижнюю сторону поверхности (σ_1) с уравнением $z = z_1(x, y)$. Поскольку интеграл $\iint_{(\sigma_3)} R(x, y, z) dx dy$, распространенный на внешнюю сторону поверхности (σ_3) , равен нулю, то имеет место равенство

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \oiint_{(\sigma_2)} R(x, y, z) dx dy + \oiint_{(\sigma_1)} R(x, y, z) dx dy + \oiint_{(\sigma_3)} R(x, y, z) dx dy.$$

Откуда следует, что

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \oiint_{(\sigma)} R(x, y, z) dx dy, \quad (12.4.2)$$

где в поверхностном интеграле интегрирование ведется в сторону внешней нормали к замкнутой поверхности $(\sigma) = (\sigma_1) \cup (\sigma_2) \cup (\sigma_3)$.

Аналогично для *x-цилиндрической* и *y-цилиндрической* областей можно вывести следующие формулы:

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \oiint_{(\sigma)} P dy dz, \quad (12.4.3)$$

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \oiint_{(\sigma)} Q dz dx. \quad (12.4.4)$$

2. Пусть теперь задана некоторая простая область (V) (см. **определение 12.4.6**), в которой координатные функции векторного поля непрерывны вместе со своими первыми частными производными вплоть до ее границы. Из определения простой области следует, что для нее имеют место все три полученных равенства (12.4.2) – (12.4.4). Складывая указанные равенства, получим формулу Остроградского – Гаусса, которая выражает ПОВИ-II, распространенный на внешнюю сторону замкнутой поверхности, через тройной интеграл, взятый по данному замкнутому телу, ограниченному этой поверхностью.

Следствие. Объем замкнутой пространственной связной области (V) может быть вычислен как с помощью тройного интеграла, взятого по этой области, так и с помощью поверхностного интеграла, взятого по ее границе (σ) :

$$V = \iiint_{(V)} dx dy dz = \frac{1}{3} \oiint_{(\sigma)} x dy dz + y dz dx + z dx dy. \quad (12.4.5)$$

Доказательство. В формулу Остроградского – Гаусса

$$\oint\limits_{(\sigma)} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

подставим $P = x$; $Q = y$; $R = z$. Тогда $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3$. Отсюда

$$\oint\limits_{(\sigma)} xdydz + ydzdx + zdxdy = 3 \cdot \iiint\limits_{(V)} dxdydz = 3 \cdot V.$$

Таким образом, будем иметь $\oint\limits_{(\sigma)} xdydz + ydzdx + zdxdy = 3 \cdot V$, откуда

и следует равенство (12.4.5).

Замечание 12.4.4. Используя поверхностные интегралы первого рода, получим вид формулы Остроградского – Гаусса, которая выражает ПОВИ-I, распространенный на внешнюю сторону замкнутой поверхности, через тройной интеграл, взятый по данному замкнутому телу, ограниченному этой поверхностью:

$$\oint\limits_{(\sigma)} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz, \quad (12.4.5)$$

где α, β, γ – углы, образованные внешней нормалью к поверхности (σ) с координатными осями.

Замечание 12.4.5. Рассматривая пространственную связную замкнутую область (V) , ограниченную замкнутой поверхностью (σ) , в векторном поле \vec{a} , можем утверждать, что левая часть формулы Остроградского – Гаусса выражает поток вектора \vec{a} через поверхность (σ) , а подынтегральная функция правой ее части – дивергенцию этого вектора. Поэтому формулу (12.4.1), представленную в координатной форме, можно записать в сжатом компактном векторном виде, в котором в приложениях формула Остроградского – Гаусса чаще всего и встречается:

$$\oint\limits_{(\sigma)} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 d\sigma = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \vec{a} dV \quad \text{или} \quad \oint\limits_{(\sigma)} \vec{a}_{\vec{n}_0} d\sigma = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \vec{a} dV.$$

Таким образом, формула Остроградского – Гаусса утверждает, что **поток векторного поля через замкнутую поверхность (σ)**

(в направлении внешней нормали) равен **тройному интегралу от дивергенции этого поля** по объему (V) , ограниченному данной поверхностью.

Отметим, что русский математик М.В. Остроградский (1801–1861) опубликовал эту замечательную формулу в 1828 г. в работе «Заметки о теории тепла». Однако принято ее называть формулой Остроградского – Гаусса, хотя Гауссом она была получена только в 1841 г.

Пример 12.4.1. Найти поток Π векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, распределенный по поверхности шара радиуса R .

Решение.

Рассмотрим шар радиуса R с центром в начале координат: $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

1 способ. Вычислим искомый поток, используя поверхностные интегралы второго рода. Воспользуемся формулой

$$\Pi = \iint_{(\sigma)} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy,$$

тогда

$$\Pi = \iint_{(\sigma)} x dydz + y dx dz + z dx dy.$$

В нашем случае, в силу симметрии слагаемых в подынтегральном выражении, а также учитывая, что проекцией верхней части сферы на плоскость yOz является окружность радиуса R с центром в начале координат, будем иметь

$$\begin{aligned} \Pi &= 3 \iint_{(\sigma)} x dydz = 3 \left(+ \iint_{(Dyz)} \sqrt{R^2 - y^2 - z^2} dydz - \iint_{(Dyz)} \left(-\sqrt{R^2 - y^2 - z^2} \right) \right) = \\ &= 6 \iint_{(Dyz)} \sqrt{R^2 - y^2 - z^2} dydz = 6 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho = \\ &= -3 \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{(R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^R = 2R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^3. \end{aligned}$$

2 способ. Вычислим поток, используя формулу Остроградского – Гаусса

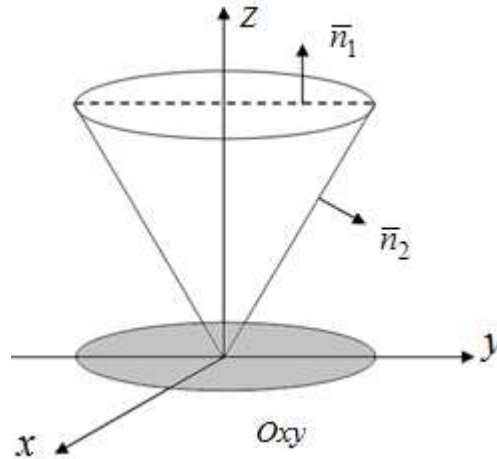
$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{(\sigma)} xdydz + ydxdy + zdxdy = \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dxdydz = \\ &= 3 \iiint_{(V)} dxdydz = 3V_{ш} = 3 \frac{4\pi R^3}{3} = 4\pi R^3, \end{aligned}$$

где $V_{ш}$ – объем шара.

Пример 12.4.2. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} - z^2\vec{k}$ через замкнутую поверхность (σ) , образованную плоскостью $z = 2$ и частью конуса $z^2 = x^2 + y^2$ ($z \geq 0$). Проверить результат с помощью формулы Остроградского.

Решение.

Изобразим заданную поверхность.



1 способ. Поверхность $(\sigma) = (\sigma_1) \cup (\sigma_2)$ состоит из двух поверхностей: (σ_1) – части плоскости $z = 2$ и (σ_2) – части конуса $z^2 = x^2 + y^2$, поэтому поток через (σ) равен сумме потоков вектора \vec{a} через составляющие поверхности:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \iint_{(\sigma_1)} (\vec{a}, \vec{n}_1) d\sigma + \iint_{(\sigma_2)} (\vec{a}, \vec{n}_2) d\sigma,$$

где \vec{n}_1 и \vec{n}_2 – внешние нормали к плоскости и конусу соответственно.

Для поверхности $z = 2$ имеем $\vec{n}_1 = \vec{k}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \iint_{(\sigma_1)} (\vec{a}, \vec{n}_1) d\sigma = \iint_{(\sigma_1)} (-z^2) d\sigma = -4 \iint_{D_{xy}} dxdy = \\ &= -4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho = -4 \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^2 \right) d\varphi = -8 \int_0^{2\pi} d\varphi = -16\pi. \end{aligned}$$

Вычислим поток через поверхность (σ_2) , уравнение которой в неявном виде дается соотношением $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Единичный вектор \bar{n}_2 внешней нормали для поверхности (σ_2) определим по формуле

$$\bar{n}_0 = \pm \frac{\overline{\text{grad} F}}{|\overline{\text{grad} F}|} = \pm \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \bar{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

поэтому

$$\bar{n}_2 = \pm \frac{2x\bar{i} + 2y\bar{j} - 2z\bar{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{x\bar{i} + y\bar{j} - z\bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

В выражении для нормали \bar{n}_2 выберем знак плюс, так как угол γ между осью Oz и нормалью – тупой и, следовательно, $\cos \gamma = \pm \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ должен быть отрицательным. Учитывая, что на поверхности (σ_2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, получаем

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \iint_{(\sigma_2)} (\bar{a}, \bar{n}_2) d\sigma = \iint_{(D_{xy})} \frac{yx - xy + z^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \frac{dxdy}{z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \\ &= \iint_{(D_{xy})} z^2 dxdy = \iint_{(D_{xy})} (x^2 + y^2) dxdy. \end{aligned}$$

Область (D_{xy}) есть круг $x^2 + y^2 \leq 4$, поэтому в последнем интеграле переходим к полярным координатам (при этом $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 2$):

$$I = \iint_{(D_{xy})} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^2 \right) d\varphi = 4 \int_0^{2\pi} d\varphi = 8\pi.$$

Таким образом, поток векторного поля через поверхность $(\sigma) = (\sigma_1) \cup (\sigma_2)$ равен $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -16\pi + 8\pi = -8\pi$.

2 способ. Найдем решение этой задачи с помощью формулы Остроградского – Гаусса $\oiint_{(\sigma)} \bar{a} \cdot \bar{n}_0 d\sigma = \iiint_{(V)} \text{div} \bar{a} dV$.

Учитывая, что дивергенция заданного поля $\text{div} \bar{a} = -2z$, а также тот факт, что поверхность $(\sigma) = (\sigma_1) \cup (\sigma_2)$ является замкнутой и поле

$\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} - z^2\bar{k}$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Остроградского – Гаусса, определим поток с использованием указанной теоремы:

$$\Pi = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \bar{a} dV = \iiint_{(V)} (-2z) dV.$$

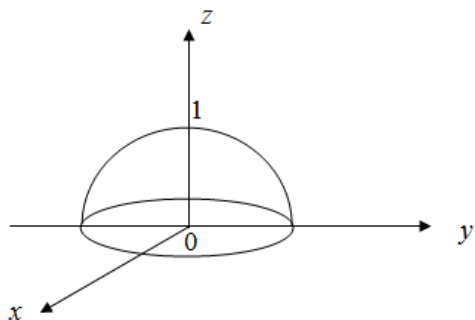
Для вычисления интеграла переходим к цилиндрическим координатам с пределами интегрирования $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 2$, $\rho \leq z \leq 2$ ($z = \rho$ – уравнение верхней части конуса $z^2 = x^2 + y^2$ в цилиндрических координатах), по формулам получаем

$$\begin{aligned} \Pi &= \iiint_{(V)} (-2z) dV = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho}^2 2z dz = \\ &= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho \left(z^2 \Big|_{\rho}^2 \right) d\rho = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho (4 - \rho^2) d\rho = \\ &= - \int_0^{2\pi} \left(\left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^2 \right) d\varphi = -4 \int_0^{2\pi} d\varphi = -8\pi. \end{aligned}$$

Пример 12.4.4. Вычислить поток поля $\bar{a} = x\bar{i} - 2y\bar{j} - z\bar{k}$ через поверхность (σ) : $x^2 + y^2 = 1 - z$, отсекаемую плоскостью $z = 0$, причем $z \geq 0$.

Решение.

Изобразим заданную поверхность – верхняя часть параболоида $x^2 + y^2 = 1 - z$, отсекаемая снизу плоскостью $z = 0$.



Очевидно, что в пересечении параболоида заданной плоскостью будем иметь окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Проекцией его на плоскость xOy будет круг, ограниченный указанной окружностью.

1 способ. Определим поток векторного поля $\bar{a} = x\bar{i} - 2y\bar{j} - z\bar{k}$ с помощью поверхностного интеграла второго рода

$$\Pi = \iint_{(\sigma)} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy.$$

В нашем случае $\Pi = \iint_{(\sigma)} x dy dz - 2y dx dz - z dx dy$. Вычислим отдельно

каждый из интегралов, проектируя их на соответствующие плоскости.

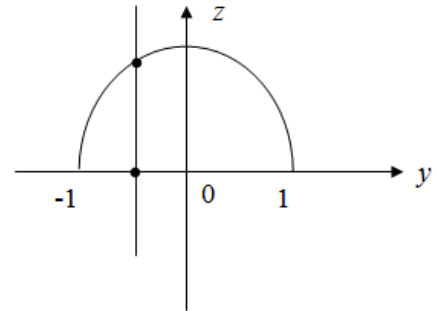
1) Имеем $I_1 = \iint_{(\sigma)} x dy dz$. В части параболоида, где $x > 0$, вектор нормали к поверхности образует острый угол с положительным направлением

оси Ox , а в той его части, где $x < 0$, вектор нормали к поверхности образует тупой угол с положительным направлением оси Ox . Поэтому воспользуемся свойством аддитивности поверхностного интеграла второго рода

$$I_1 = \iint_{(\sigma)} x dy dz = \iint_{(\sigma_1)} + \iint_{(\sigma_2)} = \left| \begin{array}{l} (\sigma) : x^2 = 1 - z - y^2 \\ (\sigma_1) : x = \sqrt{1 - z - y^2}, \cos(\vec{n}, \vec{i}) > 0 \\ (\sigma_2) : x = -\sqrt{1 - z - y^2}, \cos(\vec{n}, \vec{i}) < 0 \end{array} \right| =$$

$$= \iint_{(\sigma_1)} \sqrt{1 - z - y^2} dy dz - \iint_{(\sigma_2)} \left(-\sqrt{1 - z - y^2} \right) dy dz.$$

Изобразим проекцию параболоида на плоскость yOz . Проекция сверху ограничена параболой $z = 1 - y^2$, ветви которой направлены вниз, пересекающей ось Oy в точках: $y = 1$, $y = -1$. Снизу она ограничена осью Oy .



Тогда

$$I_1 = \iint_{(\sigma)} x dy dz = 2 \iint_{(D_{yz})} \sqrt{1 - z - y^2} dy dz =$$

$$= -2 \int_{-1}^1 dy \int_0^{1-y^2} \sqrt{(1-y^2) - z} d((1-y^2) - z) =$$

$$= -2 \int_{-1}^1 dy \cdot \frac{\left((1-y^2) - z \right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{1-y^2} = -\frac{2 \cdot 2}{3} \int_{-1}^1 \left(\left((1-y^2) - (1-y^2) \right)^{\frac{3}{2}} - (1-y^2)^{\frac{3}{2}} \right) dy =$$

$$= \frac{4}{3} \int_{-1}^1 \sqrt{(1-y^2)^3} dy = \frac{8}{3} \int_0^1 \sqrt{(1-y^2)^3} dy = \left| \begin{array}{l} y = \sin t \\ dy = \cos t dt, \sqrt{1-y^2} = \cos t \end{array} \right| =$$

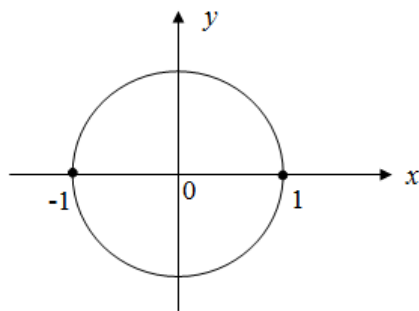
$$\begin{aligned}
&= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \cdot \cos t dt = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 dt = \\
&= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) dt = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

2) Аналогично, учитывая симметрию в выражениях для I_1 и I_2 , получим $I_2 = \iint_{(\sigma)} y dx dz = \frac{\pi}{2}$.

3) На плоскость xOy поверхность параболоида проецируется однозначно, и вектор нормали к поверхности образует острый угол с положительным направлением оси Oz , поэтому

$$I_3 = \iint_{(\sigma)} z dx dy = \left| (\sigma) : z = 1 - x^2 - y^2 \right|.$$

Изобразим проекцию параболоида на плоскость xOy . Тогда



$$\begin{aligned}
I_3 &= \iint_{(\sigma)} z dx dy = \left| (\sigma) : z = 1 - x^2 - y^2 \right| = \\
&= \iint_{(D_{xy})} (1 - x^2 - y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - \rho^2) \rho d\rho = \\
&= -\frac{1}{2} \frac{(1 - \rho^2)}{2} \Big|_0^1 \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{2} (0 - 1) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Окончательно будем иметь

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi.$$

2 способ. Для определения искомого потока применим поверхностный интеграл первого рода и воспользуемся формулой

$$I = \iint_{(\sigma)} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 d\sigma = \iint_{(D_{xy})} \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}_0}{|\cos \gamma|} \Big|_{z=f(x,y)} dx dy.$$

С учетом уравнения поверхности, единичный вектор нормали к ней имеет вид

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} \cdot (2x, 2y, 1).$$

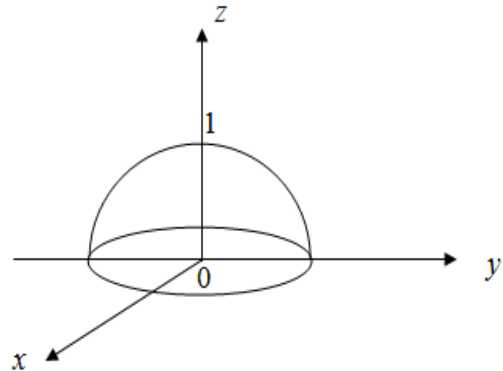
$$\begin{aligned}
\Pi &= \iint_{(\sigma)} \frac{(x \cdot 2x - 2y \cdot 2y - z)}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}} d\sigma = \iint_{(\sigma)} \frac{(2x^2 - 4y^2 - z)}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}} d\sigma = \\
&= \left| \begin{array}{l} z = 1 - x^2 - y^2, d\sigma = \sqrt{1+4(x^2+y^2)} dx dy \\ z'_x = -2x \\ z'_y = 2y \end{array} \right| = \\
&= \iint_{(D_{xy})} \frac{(2x^2 - 4y^2 - (1 - x^2 - y^2))}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}} \sqrt{1+4(x^2+y^2)} dx dy = \\
&= \iint_{(D_{xy})} (2x^2 - 4y^2 - 1 + x^2 + y^2) dx dy = \iint_{(D_{xy})} (3x^2 - 3y^2 - 1) dx dy = \\
&= \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ dx dy = \rho d\rho d\varphi \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (3\rho^2 \cdot \cos 2\varphi \cdot \rho) d\rho - \pi \cdot 1^2 = \\
&= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left(\cos 2\varphi \cdot \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 - \pi = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2\varphi \Big|_0^{2\pi} - \pi = -\pi.
\end{aligned}$$

3 способ. Вычислим поток, используя формулу Остроградского – Гаусса. Для этого «закроем» поверхность параболоида снизу плоскостью $z = 0$. В результате получим замкнутую поверхность, поток через которую, с одной стороны, может быть вычислен по формуле Остроградского – Гаусса, с другой стороны, его можно представить в виде суммы потоков через боковую поверхность параболоида и плоскость xOy :

$$\Pi_{\text{полн.}} = \Pi_{\text{бок.}} + \Pi_{\text{осн.}}$$

Отмеченный факт позволяет воспользоваться идеей вычисления искомого потока как разности: $\Pi_{\text{бок.}} = \Pi_{\text{полн.}} - \Pi_{\text{осн.}}$. Поток $\Pi_{\text{полн.}}$ – поток через замкнутую поверхность, при вычислении используем формулу Остроградского – Гаусса:

$\oiint_{(\sigma_{\text{полн.}})} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 d\sigma = \iiint_{(V)} \text{div } \vec{a} dV$. Для заданного векторного поля $\text{div } \vec{a} = 1 - 2 - 1 = -2$.



Тогда

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\text{полн.}} &= \iiint_{(V)} (-2) dx dy dz = -2 \iint_{(D_{xy})} dx dy \int_0^{1-x^2-y^2} dz = \left| x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, \right. \\
 &\quad \left. dx dy = \rho d\rho d\varphi, x^2 + y^2 = \rho^2 \right| = \\
 &= -2 \iint_{(D_{xy})} dx dy \int_0^{1-\rho^2} dz = -2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-\rho^2) \rho d\rho = (1-\rho^2)^2 \Big|_0^1 \cdot \pi = \pi(0-1) = -\pi.
 \end{aligned}$$

Затем находим поток через основание

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\text{осн.}} &= \iint_{(\sigma_{\text{осн.}})} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 d\sigma = \left| \vec{n}_0 = (0, 0, -1) \right| = \\
 &= \iint_{(\sigma_{\text{осн.}})} (x \cdot 0 - 2y \cdot 0 - z \cdot (-1)) d\sigma = \\
 &= \iint_{(\sigma_{\text{осн.}})} z d\sigma = \left| (\sigma_{\text{осн.}}) : z = 0 \right| = \iint_{(D_{xy})} 0 dx dy = 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Pi_{\text{бок.}} = \Pi_{\text{полн.}} - \Pi_{\text{осн.}} = -\pi - 0 = -\pi.$$

Обратим внимание, что поток через основание легко вычисляется другим способом: с помощью поверхностного интеграла второго рода. Рассмотрим $\iint_{(\sigma_{\text{осн.}})} x dy dz - 2y dx dz - z dx dy$. Очевидно, проекции основания

$z=0$ на плоскости xOz и yOz являются вырожденными. Значит, $\iint_{(\sigma_{\text{осн.}})} x dy dz = 0$ и $\iint_{(\sigma_{\text{осн.}})} -2y dx dz = 0$. Но $\iint_{(\sigma_{\text{осн.}})} -z dx dy$ также будет равен нулю, поскольку для $(\sigma_{\text{осн.}}) : z = 0$. Таким образом, $\Pi_{\text{осн.}} = 0 + 0 + 0 = 0$.

12.5. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ТЕОРЕМА СТОКСА

Определение 12.5.1. Пусть векторное поле задано на кусочно-гладкой линии (L) непрерывной вектор-функцией $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Криволинейный интеграл

$$\int_{(L)} \vec{a}(M) \cdot d\vec{r} = \int_{(L)} P(M) dx + Q(M) dy + R(M) dz \quad (12.5.1)$$

в теории поля называется **линейным интегралом** вектора. Причем, $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ – вектор, принадлежащий касательной $\vec{\tau}$ к кривой (L) в направлении ее обхода.

Замечание 12.5.1. Направление обхода вдоль (L) указывается заранее. Положительным считается обход против часовой стрелки. В силовом поле КРИ-II (12.5.1) выражает работу сил поля при перемещении точки вдоль линии (L) .

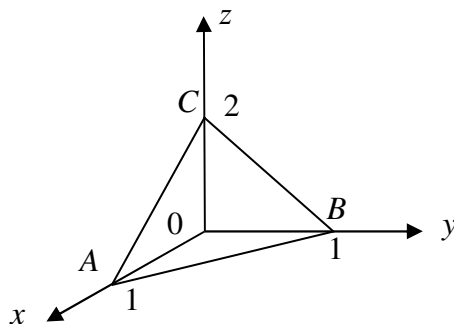
Определение 12.5.2. В случае замкнутой кривой этот интеграл называется *циркуляцией* поля вектора \vec{a} по контуру (L) , которую принято обозначать

$$C = \oint_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz = \oint_{(L)} \vec{a} \cdot d\vec{r}. \quad (12.5.2)$$

Замечание 12.5.2. Циркуляция характеризует вращательную способность поля на контуре (L) .

Замечание 12.5.3. Следует обратить отдельное внимание, что вдоль замкнутых векторных линий циркуляция отлична от нуля: в каждой точке векторной линии скалярное произведение $\vec{a} \cdot d\vec{r}$ сохраняет свой знак: «+», если направление вектора \vec{a} совпадает с направлением обхода векторной линии; «-», если не совпадает.

Пример 12.5.1. Найти циркуляцию поля вектора $\vec{a} = (x+1)\vec{i} + (x+y)\vec{j} - z\vec{k}$ вдоль периметра треугольника с вершинами $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,2)$.



Решение.

Согласно формуле (12.5.2) имеем

$$C = \oint_{(L)} (x+1)dx + (x+y)dy - zdz.$$

Обратим внимание, что периметр границы $ABCA$ треугольника состоит из трех отрезков. Эти отрезки лежат на прямых, которые задаются различными уравнениями. Воспользуемся свойством аддитивности КРИ-II

и вычислим криволинейный интеграл по контуру $ABCA$ как сумму интегралов по отрезкам AB , BC , и CA .

Составим уравнения прямой AB : $x + y = 1$, $z = 0$. С учетом полученных уравнений преобразуем криволинейный интеграл с переменной x , учитывая, что $y = 1 - x \Rightarrow dy = -dx$; $z = 0 \Rightarrow dz = 0$.

$$\begin{aligned} \int_{AB} (x+1)dx + (x+y)dy - zdz &= \int_1^0 ((x+1)dx + (x+1-x) \cdot (-dx) - 0) = \\ &= \int_1^0 (x+1-1)dx = \int_1^0 xdx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^0 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Для отрезка BC имеем

$$y + \frac{z}{2} = 1; x = 0; z = 2 - 2y \Rightarrow dz = -2dy; x = 0 \Rightarrow dx = 0.$$

$$\begin{aligned} \int_{BC} (x+1)dx + (x+y)dy - zdz &= \int_1^0 0 + ydy - (2-2y)(-2dy) = \\ &= \int_1^0 (y - 4y + 4)dy = \int_1^0 (-3y + 4)dy = \\ &= \left(-3\frac{y^2}{2} + 4y\right) \Big|_1^0 = \frac{3}{2} - 4 = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Для отрезка CA имеем

$$x + \frac{z}{2} = 1; y = 0; z = 2 - 2x \Rightarrow dz = -2dx; y = 0 \Rightarrow dy = 0.$$

$$\begin{aligned} \int_{CA} (x+1)dx + (x+y)dy - zdz &= \int_0^1 (x+1)dx + x \cdot 0 - (2-2x)(-2dx) = \\ &= \int_0^1 (x - 4x + 5)dx = -3 \int_0^1 xdx + \int_0^1 5dx = -\frac{3x^2}{2} \Big|_0^1 + 5x \Big|_0^1 = -\frac{3}{2} + 5 = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } C = \oint_{ABCA} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 12.5.2. Найти работу поля $\vec{a} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{x}\vec{j} + 4\vec{k}$ вдоль участка

AB винтовой линии: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, где $A(a, 0, 0)$, $B(a, 0, 2\pi b)$.

Решение.

Воспользуемся формулой (12.5.1), тогда

$$\begin{aligned}\int_{(AB)} \bar{a} \cdot d\bar{r} &= \int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(AB)} \frac{x}{y} dx + \frac{y}{x} dy + 4dz = \\ &= \left| \begin{array}{l} x = a \cos t, dx = -a \sin t dt, \\ y = a \sin t, dy = a \cos t dt, \\ z = bt, dz = b dt, 0 \leq t \leq 2\pi \end{array} \right| = \\ &\int_0^{2\pi} (-a \cos t + a \sin t + 4b) dt = (-a \sin t - a \cos t + 4bt) \Big|_0^{2\pi} = 8\pi b.\end{aligned}$$

Пример 12.5.3. Найти циркуляцию поля $\bar{a} = 3y^2\bar{i} + 2z^2\bar{j} - 7\bar{k}$ вдоль контура (L) : $x^2 + y^2 + z^2 = 25$; $x^2 + y^2 = 16$, $z \geq 0$, обходимого против часовой стрелки.

Решение.

Используя формулу (12.5.2), будем иметь

$$C = \oint_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz = \oint_{(L)} 3y^2 dx + 2z^2 dy - 7dz.$$

Контур (L) задан пересечением сферы радиуса $R = 5$ с центром в начале координат и кругового цилиндра, вытянутого вдоль оси Oz , имеющего в пересечении с горизонтальной плоскостью круг радиуса $R = 4$, причем пересечение поверхностей рассматривается для $z \geq 0$. Зададим контур (L) параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25; \\ x^2 + y^2 = 16, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 = 9; z \geq 0; \\ x^2 + y^2 = 16, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \cos t, y = 4 \sin t, \\ z = 3, 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Отсюда $\left| \begin{array}{l} dx = -4 \sin t dt, dy = 4 \cos t dt \\ dz = 0 dt = 0, 0 \leq t \leq 2\pi \end{array} \right|$. Тогда

$$\begin{aligned}C &= \oint_{(L)} 3y^2 dx + 2z^2 dy - 7dz = \\ &\int_0^{2\pi} \left(3(4 \sin t)^2 \cdot (-4 \sin t) + 2 \cdot 9 \cdot 4 \cos t + 0 \right) dt = -192 \int_0^{2\pi} \sin^3 t dt + 72 \int_0^{2\pi} \cos t dt = 0.\end{aligned}$$

Замечание 12.5.4. Если циркуляция вектора \vec{a} по контуру (L) характеризует вращательную способность вектора \vec{a} на данном контуре (L) , то плотность циркуляции вектора \vec{a} в данной точке M по данному направлению единичной нормали \vec{n}_0 характеризует вращательную способность вектора \vec{a} в данной точке по данному направлению \vec{n} .

В общем случае по разным направлениям, выходящим из данной точки M , плотность циркуляции вектора \vec{a} будет различна. Естественным образом возникает вопрос: по какому направлению, выходящему из данной точки, плотность циркуляции изучаемого поля \vec{a} будет наибольшей?

Оказывается, что в поле вектора \vec{a} в точке M существует такой новый вектор, называемый **ротором**, или **вихрем**, вектора \vec{a} , проекция которого на направление \vec{n} равна плотности циркуляции вектора \vec{a} по направлению \vec{n} , выходящему из точки M . Направление этого вектора и будет выражать то направление, по которому плотность циркуляции будет наибольшей.

Определение 12.5.3. Пусть векторное поле задано непрерывно дифференцируемой вектор-функцией

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Ротором (или вихрем) векторного поля \vec{a} , называется вектор

$$\overline{\text{rot}}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (12.5.3)$$

Свойства ротора векторного поля \vec{a} :

1. Линейность

$$\overline{\text{rot}}(c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \dots + c_n\vec{a}_n) = c_1\overline{\text{rot}}\vec{a}_1 + c_2\overline{\text{rot}}\vec{a}_2 + \dots + c_n\overline{\text{rot}}\vec{a}_n.$$

2. Ротор постоянного \vec{c} равен нулевому вектору: $\overline{\text{rot}}\vec{c} = 0$.

3. $\overline{\text{rot}}(\varphi \cdot \vec{a}) = \varphi \cdot \overline{\text{rot}}\vec{a} + \overline{\text{grad}}\varphi \times \vec{a}$, где $\varphi(x, y, z)$ – скалярная функция.

Замечание 12.5.5. Если через точку M поля \vec{a} провести плоскость α , определяемую единичным вектором \vec{n}_0 , то скалярное произведение $\overline{\text{rot}}\vec{a}(M) \cdot \vec{n}_0$ характеризует вращательную способность этого поля в точке M . Она зависит как от координат точки M , так и от направления

плоскости α и достигает наибольшей величины, равной $|\overline{\text{rot} \vec{a}}(M)|$, когда плоскость α перпендикулярна вектору $\overline{\text{rot} \vec{a}}(M)$.

Таким образом, модуль ротора равен максимальной удельной циркуляции поля вокруг направления, указанного ротором.

Пример 12.5.4. Найти наибольшую удельную циркуляцию поля $\vec{a}(M) = x^2 \vec{i} - xy^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ в точке $M_0(0, 2, -2)$.

Решение.

Вычислим ротор заданного векторного поля:

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot} \vec{a}} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & -xy^2 & z^2 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(z^2)}{\partial y} - \frac{\partial(-xy^2)}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial(z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial(-xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial y} \right) \vec{k} = -y^2 \vec{k}. \end{aligned}$$

Тогда $\overline{\text{rot} \vec{a}}(M) = -2^2 \vec{k} = -4 \vec{k}$, а $|\overline{\text{rot} \vec{a}}(M)| = 4$. Значит, наибольшая удельная циркуляция поля $\vec{a}(M) = x^2 \vec{i} - xy^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ в точке $M_0(0, 2, -2)$ равна 4.

ТЕОРЕМА 12.5.1 (Стокса). Пусть (σ) – гладкая ориентируемая поверхность, а (L) – замкнутая гладкая кривая, являющаяся границей поверхности (σ) . Пусть задано векторное непрерывно дифференцируемое на (σ) и (L) поле $\vec{a}(M) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$.

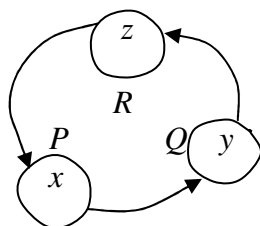
Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} \oint_{(L)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned} \quad (12.5.4)$$

в котором поверхностный интеграл вычисляется по внешней стороне замкнутой поверхности (σ) . Причем направление контура (L) и сторона поверхности (σ) согласуются по следующему правилу: вектор нормали

к поверхности (σ) направлен так, чтобы видимый из его конца обход контура совершался *против часовой стрелки*. Иначе говоря, при обходе контура (L) по выбранной стороне интегрирования поверхности (σ) прилежащая к нему часть (σ) остается слева.

Замечание 12.5.6. Чтобы запомнить правую часть формулы (12.5.4), можно поступить следующим образом: переменные x , y , и z представить в виде круговой диаграммы.



Начинаем от x и движемся в положительном направлении к y , берем функцию Q и дифференцируем по x , вычитаем производную P по y и домножаем на занятые при этом дифференциалы $dx dy$; затем движемся от y к z в положительном направлении, дифференцируем R по y и вычитаем производную Q по z ; двигаясь от z к x в положительном направлении, дифференцируем P по z и вычитаем производную z по x , умножаем на $dx dz$.

Замечание 12.5.7. Интеграл, стоящий в формуле (12.5.4) слева, представляет собой циркуляцию векторного поля \vec{a} вдоль контура (L), а правый – поток ротора этого поля через поверхность (σ), т.е. $C = \oint_{(L)} P dx + Q dy + R dz = \iiint_{(\sigma)} \overline{\text{rot} \vec{a}} \cdot \vec{n}_0 d\sigma$. Итак, **поток ротора поля через поверхность (σ) равен циркуляции вектора по границе этой поверхности.**

Замечание 12.5.8. Отметим, что КРИ-II в формуле Стокса может быть заменен на КРИ-I, а ПОВИ II – поверхностным интегралом первого рода. В таком случае формула (12.5.4) фактически описывает связь между основными видами интегралов по фигуре и принимает вид

$$\begin{aligned} C &= \oint_{(L)} P dx + Q dy + R dz = \oint_{(L)} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint_{(L)} \vec{a} \cdot \vec{\tau}_0 d\ell = \iiint_{(\sigma)} \overline{\text{rot} \vec{a}} \cdot \vec{n}_0 d\sigma = \\ &= \iint_{(\sigma)} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) d\sigma, \end{aligned} \quad (12.5.5)$$

где $\vec{\tau}_0$ – единичный вектор касательной к контуру (L);

$\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – направляющие косинусы нормали, отвечающие выбранной стороне поверхности.

Замечание 12.5.9. Если в качестве куска поверхности (σ) взять плоскую область (D) на плоскости xOy ($z = 0$), то проекции (σ) на xOz и yOz имеют нулевую площадь, следовательно, в правой части формулы (12.5.4) остается лишь последний член, а так как $dz = 0$, то в левой части (12.5.4) отсутствует последнее слагаемое. Тогда формула (12.5.4) принимает вид формулы Остроградского – Грина

$$\int_{(L)} Pdx + Qdy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

которая является частным случаем формулы Стокса.

Замечание 12.5.10. Формула Ньютона – Лейбница, формулы Остроградского – Грина, Стокса и Остроградского – Гаусса, по существу, объединены общей идеей: они вычисляют интеграл, распространенный на некоторый геометрический объект, через интеграл, взятый по границе этого объекта. При этом формула Ньютона – Лейбница $\left(\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \right)$

относится к случаю одномерного пространства (числовая прямая), формулы Остроградского – Грина и Стокса относятся к двумерному пространству (плоскость), а формула Остроградского – Гаусса – случай трехмерного пространства.

Замечание 12.5.10. Пусть на некоторой поверхности (σ) заданы функции P, Q, R , непрерывные со своими производными. С помощью формулы Стокса устанавливаются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы обращался в нуль интеграл $\oint_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz$, взятый по

любому простому замкнутому контуру (L) , лежащему в (σ) . В случае произвольной поверхности (σ) достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Эти условия являются и необходимыми, если рассматривать плоские фигуры (σ) , лежащие в плоскостях, параллельных поочередно той или другой из координатных плоскостей.

Пример 12.5.5. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} - z^2\vec{k}$ по контуру (L) , образованному пересечением поверхно-

стей (σ_1) : $z = 2$ и (σ_2) : $z^2 = x^2 + y^2 (z \geq 0)$. Проверить результат с помощью формулы Стокса.

Решение.

1 способ. Пересечением указанных поверхностей является окружность $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 2. \end{cases}$

Направление обхода контура выбирается обычно так, чтобы ограниченная им область оставалась слева. Запишем параметрические уравнения контура (L) :

$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \\ z = 2, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} dx = -2 \sin t dt, \\ dy = 2 \cos t dt, \\ dz = 0, \end{cases} \quad (12.5.5)$$

причем параметр t изменяется от 0 до 2π . По формуле (12.5.2) с учетом (12.5.5) получаем

$$\begin{aligned} C = \oint_{(L)} P dx + Q dy + R dz &= \int_0^{2\pi} 2 \sin t \cdot (-2 \sin t) dt - 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt - 4 \cdot 0 dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-4 \sin^2 t - 4 \cos^2 t) dt = -4 \int_0^{2\pi} dt = -8\pi. \end{aligned}$$

2 способ. Применим теперь формулу Стокса (12.5.4). В качестве поверхности (σ) , натянутой на контур (L) , можно взять часть плоскости $z = 2$. Направление нормали $\vec{n}_0 = \vec{k}$ к этой поверхности согласуется с направлением обхода контура (L) . Вычислим ротор заданного векторного поля:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot} a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & -z^2 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(-z^2)}{\partial y} - \frac{\partial(-x)}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial(y)}{\partial z} - \frac{\partial(-z^2)}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y} \right) \vec{k} = -2\vec{k}. \end{aligned}$$

Поэтому искомая циркуляция

$$C = \iint_{(\sigma)} (\overline{\text{rot} \vec{a}} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint_{(\sigma)} (-2\vec{k} \cdot \vec{k}) d\sigma = -2 \iint_{(\sigma)} d\sigma = -2 \iint_{(D_{xy})} dx dy = -2 \cdot \pi \cdot 2^2 = -8\pi$$

и совпадает со значением циркуляции, полученным непосредственным вычислением.

12.6. ОПЕРАТОРЫ ГАМИЛЬТОНА И ЛАПЛАСА

Замечание 12.6.1. Для дифференциальных операций теории поля (градиента, дивергенции и вихря), рассмотренных в предыдущих параграфах, можно построить достаточно удобную формальную алгебраическую теорию, если ввести так называемые операторы Гамильтона и Лапласа.

Определение 12.6.1. *Оператор Гамильтона* (оператор набла) по определению записывают в виде символического вектора:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

Замечание 12.6.2. С учетом оператора Гамильтона основные операции теории поля можно записать следующим образом:

$$\overline{\text{grad} u} = \vec{\nabla} u, \quad \text{div } \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}, \quad \overline{\text{rot} \vec{a}} = \vec{\nabla} \times \vec{a}.$$

Оператор набла является удобным средством получения и описания различных формул векторного анализа, причем эти формулы приобретают в такой записи большую наглядность и выразительность. При выполнении действий с оператором набла следует учитывать, что этот оператор дифференциальный и векторный. Поэтому необходимо пользоваться как правилами дифференциального исчисления, так и свойствами скалярного, векторного и смешанного произведений, известных из векторной алгебры. При этом следует также помнить, что если оператор набла действует на какое-либо произведение, то в первую очередь учитывают его дифференциальные свойства, а затем векторные.

Например, рассмотрим $\overline{\text{rot}(\text{rot} \vec{a})} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a})$. Выразим указанный вектор через операции градиента, дивергенции и оператор набла. Для этого эту формулу запишем, учитывая соответствующее свойство двойного векторного произведения:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}.$$

Тогда будем иметь

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot} \vec{a}}) = \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \vec{a}) = (\bar{\nabla} \cdot \vec{a}) \bar{\nabla} - (\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}) \vec{a} = \overline{\text{grad}}(\text{div} \vec{a}) - \bar{\nabla}^2 \vec{a}.$$

Определение 12.6.2. Попарные комбинации операций градиента дивергенции и ротора называют *операциями второго порядка*.

Например, $\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot} \vec{a}})$, $\overline{\text{grad}}(\text{div} \vec{a})$, $\text{div}(\overline{\text{grad} u})$, $\text{div}(\overline{\text{rot} \vec{a}})$.

Определение 12.6.3. Оператор $\bar{\nabla}^2$ обозначают Δ и называют **оператором Лапласа** (лапласианом).

Замечание 12.6.3. Формально оператор Лапласа можно определить, как «скалярный квадрат» оператора Гамильтона

$$\Delta = \bar{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Лапласиан скалярного поля $U = U(x, y, z)$ имеет вид

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Определение 12.6.4. Уравнение $\Delta U = 0$ называют **уравнением Лапласа**, а поля, удовлетворяющие уравнению Лапласа, – полями Лапласа, или гармоническими полями.

Например, в физике к полям Лапласа (гармоническим полям) относятся ньютоново поле в области, свободной от масс, и поле Био – Савара в области, свободной от токов.

12.7. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВИДЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ (ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ, СОЛЕНОИДАЛЬНОЕ, ГАРМОНИЧЕСКОЕ)

В физике и отдельных приложениях весьма важное значение имеют векторные поля, для которых равны нулю те или иные дифференциальные операции первого и второго порядков.

Определение 12.7.1. Векторное поле называется **безвихревым (потенциальным)**, если в каждой точке пространства или рассматриваемой области вихрь равен нулю:

$$\overline{\text{rot} \vec{a}} = 0. \quad (12.7.1)$$

Потенциальным, например, является электрическое поле.

ТЕОРЕМА 12.7.1. Поле градиента любой скалярной функции (скалярного поля) является потенциальным.

Доказательство. Рассмотрим векторное поле $\overline{\text{grad}U} = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}$ – градиент любого скалярного поля $U = U(x, y, z)$ (например, поля давлений или температур). Проверим условие (12.6.1). Для этого вычислим

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot}}(\overline{\text{grad}U}) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right) \bar{k} = \\ &= 0 \cdot \bar{i} - 0 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, выполняется условие: $\overline{\text{rot}}(\overline{\text{grad}U}) = 0$. Значит, по определению, поле градиента любой скалярной функции (скалярного поля) является потенциальным.

Упражнение. Доказать, что векторное поле $\bar{a}(M) = x\bar{i} + 2yz\bar{j} + (y^2 - 2z)\bar{k}$ является потенциальным.

Замечание 12.7.1. Если векторное поле $\bar{a}(M)$ потенциально, т.е. во всех точках поля $\overline{\text{rot}}\bar{a} = 0$, то оно является градиентом некоторого скалярного поля $U(M)$, т.е. $\bar{a}(M) = \overline{\text{grad}U}$. Эту функцию $U(M)$ называют **потенциалом поля**, который фактически определяет указанное поле.

Поверхности уровня потенциального поля принято называть **эквипотенциальными поверхностями**. (Иногда пишут $\bar{a}(M) = -\overline{\text{grad}U}$, т.к. обычно векторные линии направлены в сторону убывания потенциала $U(M)$: поток жидкости направлен туда, где давление меньше; теплота перемещается от более нагретого тела к менее нагретому и т.п.).

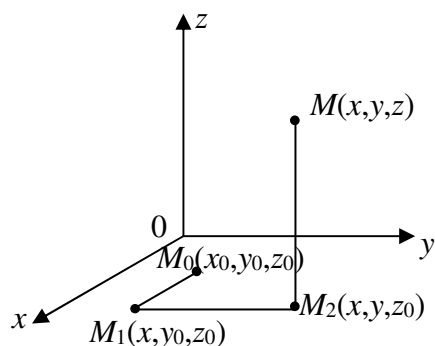
В потенциальном поле линейный интеграл (работа) не зависит от формы линии, соединяющей какие-либо две его точки, а циркуляция вдоль всякого замкнутого контура всегда равна нулю.

Рассмотрим достаточно удобный и простой способ определения потенциала $U(x, y, z)$ векторного поля

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Зафиксируем точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (например, с целыми значениями координат), а интегрирование будем вести вдоль ломаной, отрезки которой параллельны осям. В произвольной точке $M(x, y, z)$ будем иметь

$$U(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz. \quad (12.7.2)$$



Линию интегрирования (в силу независимости такого интеграла от формы пути) выберем в виде ломаной $M_0M_1M_2M$, где отрезок M_0M_1 параллелен оси Ox , отрезок M_1M_2 параллелен оси Oy , а отрезок M_2M параллелен оси Oz :

В этом случае формула (12.7.2) принимает вид

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z)dz, \quad (12.7.3)$$

причем в первом интеграле формулы (12.7.3) постоянны переменные y и z , во втором – z .

Замечание 12.7.2. Если найдена функция $U(x, y, z)$ – первообразная для $Pdx + Qdy + Rdz$, то значение интеграла определяется по формуле

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} Pdx + Qdy + Rdz = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1), \quad (12.7.4)$$

которая представляет собой аналог формулы Ньютона – Лейбница. Очевидно, что в формуле (12.7.4) можно «прочитать» следующее утверждение: если известен потенциал $U = U(x, y, z)$ векторного поля $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, то работа этого поля вдоль пути, соединяющего точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, равна приращению потенциала на этом пути.

Определение 12.7.2. Векторное поле называется **трубчатым** или **соленоидальным**, если в каждой точке этого поля дивергенция равна нулю:

$$\operatorname{div} \vec{a} = 0. \quad (12.7.5)$$

Пример 12.7.1. Показать, что поле линейных скоростей жидкости, вращающейся как твердое тело вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$, является соленоидальным.

Решение.

В качестве оси вращения жидкости примем ось Oz . Угловую скорость представим в виде вектора $\vec{\omega}$, лежащего на этой оси, т.е. $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$. Вектор линейной скорости $\vec{a}(M)$, как известно из курса физики, направлен в сторону вращения и совпадает с направлением векторного произведения $\vec{\omega} \times \vec{r}$, где вектор \vec{r} является радиусом-вектором точки M . Следова-

тельно, $\vec{a}(M) = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j} + 0 \vec{k}$. Вычислим диверген-

цию заданного поля:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial(-\omega y)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega x)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z} = 0.$$

Таким образом, полученный результат доказывает, что поле линейных скоростей жидкости, вращающейся как твердое тело вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$, является соленоидальным.

Примером соленоидального поля является также магнитное поле, создаваемое прямолинейным проводником, вдоль которого течет электрический ток и другие.

ТЕОРЕМА 12.7.2. В соленоидальном векторном поле \vec{a} поток этого поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Замечание 12.7.3. В соленоидальном векторном поле \vec{a} источники и стоки отсутствуют. Все векторные линии соленоидального поля непрерывны, замкнуты.

Замечание 12.7.4. Поток соленоидального векторного поля через любое сечение векторной трубки есть величина постоянная. Указанную постоянную называют **интенсивностью** этой векторной трубки. Это свойство определило название поля – соленоидальное (трубчатое). В поле линейных скоростей текущей жидкости выделенный факт означает, что

количество жидкости, втекающее в трубку за единицу времени, равно количеству жидкости, вытекающей из нее.

ТЕОРЕМА 12.7.3. Векторное поле, образованное ротором векторного поля \bar{a} , является соленоидальным.

Доказательство. Рассмотрим векторное поле

$$\bar{a}(M) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k},$$

предполагая непрерывность его составляющих и их производных. Вычислим ротор этого поля:

$$\text{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \bar{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \bar{j} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k}.$$

Для полученного векторного поля найдем дивергенцию, учитывая, что при введенном предположении смешанные производные равны между собой. Будем иметь

$$\text{div rot}\bar{a} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0,$$

что и доказывает соленоидальность поля вихрей.

Замечание 12.7.5. Соленоидальное векторное поле \bar{a} характеризуется наличием векторного потенциала. Это означает, что для него существует такая векторная функция $\bar{V}(M)$, что выполняется равенство:

$$\bar{a}(M) = \text{rot}\bar{V}(M). \text{ Поле } \bar{V}(M) \text{ называется } \textbf{вектор-потенциалом}.$$

Упражнение. Проверить, что векторное поле $\bar{a} = yz\bar{i} - x^2z\bar{j} + x\sqrt{y}\bar{k}$ является соленоидальным.

Определение 12.7.3. Векторное поле, являющееся одновременно и *соленоидальным*, и *потенциальным*, называется *гармоническим, или лапласовым*.

Важным **примером** гармонического поля является поле линейных скоростей стационарного безвихревого потока жидкости при отсутствии в нем источников и стоков.

Пример 12.7.2. Показать, что векторное поле

$$\bar{a} = (y + z)\bar{i} + (x + 3z)\bar{j} + (x + 3y)\bar{k}$$

является гармоническим. Найти его потенциал.

Решение.

Покажем, что $\overline{\text{rot} \vec{a}} = \vec{0}$ и $\text{div} \vec{a} = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot} \vec{a}} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+3z & x+3y \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(x+3y)}{\partial y} - \frac{\partial(x+3z)}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial(x+3y)}{\partial x} - \frac{\partial(y+z)}{\partial z} \right) \vec{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial(x+3z)}{\partial x} - \frac{\partial(y+z)}{\partial y} \right) \vec{k} = (3-3)\vec{i} - (1-1)\vec{j} + (1-1)\vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

$$\text{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial(y+z)}{\partial x} + \frac{\partial(x+3z)}{\partial y} + \frac{\partial(x+3y)}{\partial z} = 0.$$

Следовательно, поле является гармоническим. Найдем его потенциал.

$$\begin{aligned} U(M) &= \int_{x_0}^x (y_0 + z_0) dx + \int_{y_0}^y (x + 3z_0) dy + \int_{z_0}^z (x + 3y) dz = \\ &= (y_0 + z_0) x \Big|_{x_0}^x + (xy + 3z_0 y) \Big|_{y_0}^y + (xz + 3yz) \Big|_{z_0}^z = \\ &= (y_0 + z_0)(x - x_0) + xy + \cancel{3z_0 y} - xy_0 - 3z_0 y_0 + xz + 3yz - xz_0 - \cancel{3yz_0} = \\ &= \cancel{xy_0} - x_0 y_0 + \cancel{xz_0} - x_0 z_0 + xy - \cancel{xy_0} - 3z_0 y_0 + xz + 3yz - \cancel{xz_0} = \\ &= xy + xz + 3yz - x_0 y_0 - x_0 z_0 - 3z_0 y_0. \end{aligned}$$

Таким образом, искомый потенциал имеет вид

$$U(M) = xy + xz + 3yz + C_1, \text{ где } C_1 = -x_0 y_0 - x_0 z_0 - 3z_0 y_0.$$

Замечание 12.7.6. В качестве точки M_0 удобно взять точку $O(0,0,0)$. Тогда $U(M) = \int_0^x 0 dx + \int_0^y x dy + \int_0^z (x + 3y) dz = xy + xz + 3yz$. Итак, $U(M) = xy + xz + 3yz$ является потенциалом поля \vec{a} . Действительно, $\overline{\text{grad} U} = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} = (y+z)\vec{i} + (x+3z)\vec{j} + (x+3y)\vec{k} = \vec{a}$.

Замечание 12.7.7. Если поле является гармоническим, то $\text{div} \overline{\text{grad} U} = 0$, а потенциал поля U является гармонической функцией, т.е. удовлетворяет дифференциальному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Проверим, что U удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y + z, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x + 3z, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = x + 3y;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Следовательно, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$.

Замечание 12.7.8. Лапласово (гармоническое) поле $\vec{a}(M)$ обладает всеми свойствами потенциального и соленоидального полей и, следовательно, скалярным $U(M)$ и векторным $\vec{V}(M)$ потенциалами. При этом скалярный потенциал поля $U(M)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Гармонические функции используются в аэродинамике для получения безвихревых полей.

Пример 12.7.3. Показать, что функция $U = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ является гармонической.

Решение. Применим к заданной функции оператор Лапласа. Вычис-

$$\begin{aligned} \text{лим } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \left(\ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + 0 = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{2x^2 + 2y^2 - 2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, условие $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$ для заданной функции

выполняется, следовательно, функция $U = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ является гармонической.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

1. Поверхностный интеграл первого рода, его определение, свойства.
2. Вычисление поверхностного интеграла первого рода.
3. Приложения поверхностного интеграла первого рода (площадь, масса, моменты и центр тяжести поверхности).
4. Поверхностный интеграл второго рода, его определение, свойства.
5. Вычисление поверхностного интеграла второго рода.
6. Векторное и скалярное поле. Векторные линии и поток поля.
7. Дивергенция векторного поля. Формула Остроградского – Гаусса.
8. Циркуляция векторного поля.
9. Ротор векторного поля. Формула Стокса.
10. Соленоидальное, потенциальное и гармоническое поля, их определения и свойства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабко, Г.И. Теория и практика проектирования : учеб.-метод. комплекс: (Метод. рекомендации для преподавателей вузов) / Г.И. Бабко. – Минск : РИВШ, 2004.
2. Беспалько, В.П. Системно-методическое обеспечение учебно-воспитательного процесса подготовки специалистов / В.П. Беспалько, Ю.Г. Татур. – М., 1989.
3. Проектирование и разработка учебно-методических комплексов по циклу социально-гуманитарных дисциплин в вузе : материалы для слушателей курсов повышения квалификации / под общ. ред. А.В. Макарова. – Минск : РИВШ, 2003.
4. Пальчевский, Б.В. Концепция УМК / Б.В. Пальчевский, Л.С. Фридман. – Минск, 1993.
5. Яско, Ф.Ф. Методические рекомендации о порядке разработки, утверждения и распространения учебно-методических комплексов / Ф.Ф. Яско. – Новополоцк : Полоц. гос. ун-т, 2004.
6. Яско, Ф.Ф. Положение о подготовке и выпуске научных и учебных изданий / Ф.Ф. Яско. – Новополоцк : Полоц. гос. ун-т, 2005.
7. Вакульчик, В.С. Элементы линейной алгебры. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной : учеб.-метод. комплекс / В.С. Вакульчик. – Новополоцк : Полоц. гос. ун-т, 2007.
8. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак. – Минск : Навука і тэхніка, 1991.
9. Неопределенный интеграл : учеб.-метод. комплекс для студентов техн. специальностей / В.С. Вакульчик [и др.] ; М-во образования Респ. Беларусь, Полоцкий гос. ун-т ; под общ. ред. В.С. Вакульчик. – Новополоцк : ПГУ, 2010. – 165 с.
10. Определенный интеграл. Функции нескольких переменных : учеб.-метод. комплекс для студентов техн. специальностей / В.С. Вакульчик [и др.] ; М-во образования Респ. Беларусь, Полоцкий гос. ун-т ; под общ. ред. В.С. Вакульчик. – Новополоцк : Полоц. гос. ун-т, 2011. – 243 с.
11. Специальные главы высшей математики : учеб.-метод. комплекс для студентов техн. специальностей : в 2 ч. / М-во образования Респ. Беларусь, Полоц. гос. ун-т ; под общ. ред. В.С. Вакульчик, Ф.Ф. Яско. – Новополоцк : Полоц. гос. ун-т, 2013. – Ч. 1. – 135 с.

12. Индивидуальные задания по высшей математике: Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учеб. пособие / А.П. Рябушко [и др.] ; под общ. ред. А.П. Рябушко. – 2-е изд., перераб. – Минск : Выш. шк., 2005. – 367 с.
13. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике : учеб. пособие для втузов / А. Д. Мышкис. – изд. 4-е, стер. – М. : Наука, 1973. – 640 с.
14. Руководство к решению задач по высшей математике : учеб. пособие для втузов : в 2 ч. / Е. И. Гурский [и др.] ; под общ. ред. Е.И. Гурского. – Минск : Выш. шк., 1990. – Ч. 2. – 399 с.
15. Сухая, Т.А. Задачи по высшей математике : учеб. пособие для втузов : в 2 ч. / Т.А. Сухая, В.Ф. Бубнов. – Минск : Выш. шк., 1993. – Ч. 2. – 301 с.
16. Высшая математика для инженеров : учеб. пособие для вузов : в 2 т. / С.А. Минюк, Н.С. Березкина, А.В. Метельский ; под общ. ред. Н.А. Микулика. – Минск : Элайда, 2004. – Т. 2. – 586 с.
17. Высшая математика : учеб.-метод. комплекс для студентов техн. специальностей : в 2 ч. / сост. и общ. ред. Н.В. Цывиса. – Новополоцк : Полоц. гос. ун-т, 2005. – Ч. 2. – 343 с.
18. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – изд. 5-е, испр. – М. : Высш. шк., 1999. – Ч. 2. – 416 с.

ГЛОССАРИЙ

Новые понятия	Содержание
Производная по направлению	<p>для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$</p> $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \cos \gamma,$ <p>где $\bar{s}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ – единичный вектор, соответствующий вектору направления \bar{s}</p>
Градиентом	<p>называется вектор, имеющий координаты $\frac{\partial u(M)}{\partial x}, \frac{\partial u(M)}{\partial y}, \frac{\partial u(M)}{\partial z}$ и обозначаемый символом $\overline{\text{grad } u}$.</p> $\overline{\text{grad } u} = \frac{\partial u(M)}{\partial x} i + \frac{\partial u(M)}{\partial y} j + \frac{\partial u(M)}{\partial z} k$ $\frac{\partial u(M)}{\partial \bar{s}} = \overline{\text{grad } u} \cdot \bar{s}_0$
Скалярное поле	<p>задано в области (V), если любой точке M из (V) поставлено в соответствие число $U(M)$, где (V) – область в пространстве или на плоскости</p>
Векторное поле	<p>задано в области (V), если любой точке M области (V) поставлен в соответствие вектор $\bar{a}(M)$, где (V) – область в пространстве или на плоскости</p>
Поверхностью уровня скалярного поля $U(M)$	<p>называется геометрическое место точек, в которых поле принимает данное фиксированное значение C,</p> $u(M) = C$
Векторной линией (силовой линией, линией тока) векторного поля $\bar{a}(M)$	<p>называется линия (L), лежащая в области (V), в каждой точке которой направление касательной к ней совпадает с направлением $\bar{a}(M)$ в этой точке</p>
Векторной трубкой	<p>называется часть пространства, в котором задано векторное поле $\bar{a}(M)$, ограниченная некоторой поверхностью (σ), если в каждой точке поверхности (σ) нормаль к ней ортогональна $\bar{a}(M)$ в этой же точке</p>

Новые понятия	Содержание
Потоком векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхность (σ) в сторону, определяемую единичным вектором \vec{n}_0 нормали к поверхности (σ)	называют предел суммы элементарных потоков через частичные области, на которые разбивается область (σ) , когда число частичных областей неограниченно возрастает при условии, что длина наибольшего из диаметров разбиения неограниченно убывает. При этом предполагается, что указанный предел существует, не зависит ни от способа разбиения на частичные области, ни от способа выбора точек внутри него, ни от способа стремления диаметров разбиения к нулю
Средней удельной обильностью источников и стоков в объеме (V)	называется отношение потока вектора поля \vec{a} к объему V , ограниченному замкнутой поверхностью (σ) : $\frac{\iint_{(\sigma)} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 d\sigma}{V}$
Дивергенцией векторного поля \vec{a}	называется предел средней удельной обильности при стремлении объема ΔV к нулю и стягивании этого объема в точку M : $\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{(\sigma)} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 d\sigma}{\Delta V}$
Дивергенция векторного поля $\operatorname{div} \vec{a}(M)$	в ДПСК выражается формулой $\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$ если $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – непрерывны вместе со своими частными производными в области (V)
ТЕОРЕМА Остроградского – Гаусса	Пусть в замкнутой области (V) , ограниченной замкнутой поверхностью (σ) , задано векторное поле $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Если в области (V) координатные функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими первыми частными производными во всей области (V) , включая ее границу, то имеет место формула Остроградского – Гаусса $\oiint_{(\sigma)} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz,$ в которой поверхностный интеграл вычисляется по внешней стороне замкнутой поверхности (σ)

Новые понятия	Содержание
Формула Остроградского – Гаусса	утверждает, что поток векторного поля через замкнутую поверхность (σ) (в направлении внешней нормали) равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по объему (V), ограниченному данной поверхностью
Линейным интегралом вектора	называется в теории поля криволинейный интеграл $\int_{(L)} \vec{a}(M) \cdot d\vec{r} = \int_{(L)} P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz,$ где векторное поле задано на кусочно-гладкой линии (L) непрерывной вектор-функцией $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$ Причем, $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ – вектор, принадлежащий касательной $\vec{\tau}$ к кривой (L) в направлении ее обхода
Циркуляцией поля вектора \vec{a} по контуру (L)	называется линейный интеграл в случае замкнутой кривой, который принято обозначать $C = \oint_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz = \oint_{(L)} \vec{a} \cdot d\vec{r}$
Ротором (или вихрем) векторного поля \vec{a}	называется вектор $\overline{\text{rot} \vec{a}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$ $= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k},$ где $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ – векторное поле, заданное непрерывно дифференцируемой вектор-функцией
Модуль ротора	равен максимальной удельной циркуляции поля вокруг направления, указанного ротором

Новые понятия	Содержание
ТЕОРЕМА Стокса	<p>Пусть (σ) – гладкая ориентируемая поверхность, а (L) – замкнутая гладкая кривая, являющаяся границей поверхности (σ). Пусть задано непрерывно дифференцируемое на (σ) и (L) векторное поле $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$.</p> <p>Тогда имеет место равенство</p> $\oint_{(L)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$ $= \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$ <p>в котором поверхностный интеграл вычисляется по внешней стороне замкнутой поверхности (σ). Причем направление контура (L) и сторона поверхности (σ) согласуются по следующему правилу: вектор нормали к поверхности (σ) направлен так, чтобы видимый из его конца обход контура совершался против часовой стрелки</p>
Оператор Гамильтона (оператор набла)	<p>по определению записывают в виде символического вектора</p> $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$
Операциями второго порядка	называют попарные комбинации операций градиента, дивергенции и ротора
Оператором Лапласа (лапласианом)	<p>называют оператор $\vec{\nabla}^2$ обозначают Δ.</p> $\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
Лапласиан ска- лярного поля $U = U(x, y, z)$	имеет вид $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$.
Уравнением Лапласа	называют уравнение $\Delta U = 0$

Новые понятия	Содержание
Полями Лапласа или гармоническими полями	называют поля, удовлетворяющее уравнению Лапласа
Гармоническими функциями	называются функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа $\Delta U = 0 \text{ или } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$
Безвихревым (потенциальным) полем	называется векторное поле, для которого в каждой точке пространства или рассматриваемой области вихрь равен нулю: $\overline{\text{rot} \vec{a}} = 0$
Трубчатым или соленоидальным полем	называется векторное поле, если в каждой точке этого поля или рассматриваемой области дивергенция равна нулю: $\text{div} \vec{a} = 0$
Гармоническим или лапласовым полем	называется векторное поле, являющееся одновременно и соленоидальным , и потенциальным . Для гармонического векторного поля $\overline{\text{rot} \vec{a}} = 0 \text{ и } \text{div} \vec{a} = 0$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Учебно-информационный блок для проведения практических занятий

Тема занятия	Тип занятия	Кол-во часов
I. Основные понятия векторного анализа	Повторение и обобщение имеющихся знаний в области интегрирования по фигуре с использованием информационной таблицы. Усвоение и закрепление изученного на лекции нового материала	2
II. Поток векторного поля через поверхность. Дивергенция векторного поля. Теорема Остроградского – Гаусса	Углубление и расширение полученных знаний. Усвоение нового материала. Текущий контроль	2
III. Циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля. Теорема Стокса	Усвоение и закрепление нового материала. Применение полученных знаний. Текущий контроль	2
IV. Операторы Гамильтона и Лапласа. Потенциальное, соленоидальное и гармоническое векторные поля	Усвоение и закрепление нового материала. Применение полученных знаний. Текущий контроль	2

Основная и дополнительная литература

1. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак. – Минск : Навука и тэхніка, 1991.
2. Неопределенный интеграл : учеб.-метод. комплекс для студентов техн. специальностей / В.С. Вакульчик [и др.] ; под общ. ред. В.С. Вакульчик. – Новополоцк : Полоц. гос. ун-т, 2010. – 165 с.
3. Определенный интеграл. Функции нескольких переменных : учеб.-метод. комплекс для студентов техн. специальностей / В.С. Вакульчик [и др.] ; под общ. ред. В.С. Вакульчик. – Новополоцк : Полоц. гос. ун-т, 2011. – 243 с.
4. Специальные главы высшей математики : учебно-метод. комплекс для студентов техн. специальностей : в 2 ч. / под общ. ред. В.С. Вакульчик, Ф.Ф. Яско. – Новополоцк : Полоц. гос. ун-т, 2013. – Ч. 1. – 135 с.
5. Индивидуальные задания по высшей математике: Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учеб. пособие / А.П. Рябушко [и др.] ; под общ. ред. А.П. Рябушко. - 2-е изд., перераб. – Минск : Выш. шк., 2005. – 367 с.
6. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике : учеб. пособие для втузов / А.Д. Мышкис. – Изд. 4-е, стер. – М. : Наука, 1973. – 640 с.
7. Руководство к решению задач по высшей математике : учеб. пособие для втузов : в 2 ч. / Е.И. Гурский [и др.] ; под общ. ред. Е.И. Гурского. – Минск : Выш. шк., 1990. – Ч. 2. – 399 с.
8. Сухая, Т.А. Задачи по высшей математике : учеб. пособие для втузов : в 2 ч. / Т.А. Сухая, В.Ф. Бубнов. – Минск : Выш. шк., 1993. – Ч. 2. – 301 с.
9. Высшая математика для инженеров : учеб. пособие для вузов : в 2 т. / С.А. Минюк, Н.С. Березкина, А.В. Метельский ; под общ. ред. Н.А. Микулика. – Минск : Элайда, 2004. – Т. 2. – 586 с.
10. Высшая математика : учеб.-метод. комплекс для студентов техн. специальностей : в 2 ч. / сост. и общ. ред. Н.В. Цывиса. – Новополоцк : Полоц. гос. ун-т, 2005. – Ч. 2. – 343 с.
11. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – Изд. 5-е, испр. – М. : Высш. шк., 1999. – Ч. 2. – 416 с.

I. Основные понятия векторного анализа

1. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала, графической схемы.

Обращаем внимание, что понятие поля лежит в основе многих представлений современной физики и техники. Будут рассмотрены скалярные и векторные поля.

Определение I.1. В области (V) задано скалярное поле, если каждой точке M этой области поставлено в соответствие некоторое число $U(M)$.

Примерами скалярных полей могут служить поле температур некоторого нагретого тела, поле освещенности, поле плотности и массы, поле плотности электрического заряда и т.д.

Область (V) может быть одномерной, где $U(M) = U(x)$, двумерной – где $U(M) = U(x, y)$ и трехмерной – где $U(M) = U(x, y, z)$.

Определение I.2. Поверхностью уровня скалярного поля $U(M)$ называют геометрическое место точек, в которых $U(x, y, z) = c$, $c = \text{const}$.

Таким образом, поверхность уровня скалярного поля $U(M)$ есть совокупность точек пространства, в которых функция этого поля имеет одинаковые значения. Если область двумерная, то говорят о линиях уровня $U(x, y) = c$.

Обучающая задача 1. Записать уравнения линии уровня плоских скалярных полей и построить их при $U = 1, 2, 3$.

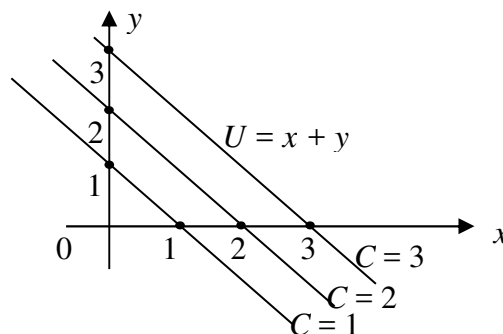
а) $U = x + y$;

б) $U = x^2 + y^2$;

с) найти поверхность уровня скалярного поля $U = 2x^2 - 3y^2 + 16x - 18y - 12z + 43$, проходящую через точку $M(-1; 1; 1)$.

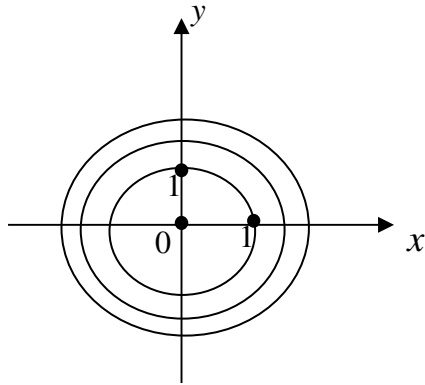
Решение. Напишем уравнения линий уровня:

а) $x + y = C$ ($C = \text{const}$. Если $C = 1$, то $x + y = 1$; если $C = 2$, то $x + y = 2$; если $C = 3$, то $x + y = 3$).



Построив эти линии в прямоугольной системе координат xOy , получим прямые, параллельные биссектрисе 2-го и 4-го координатных углов.

б) $x^2 + y^2 = c$ (если $c=1$, то $x^2 + y^2 = 1$; если $c=2$, то $x^2 + y^2 = 2$; если $c=3$, то $x^2 + y^2 = 3$ – уравнения линий уровня).



Построив их в плоскости xOy , получим концентрические окружности с центром в начале координат.

с) Совокупность поверхностей уровня данного поля определяется уравнением

$$U = 2x^2 - 3y^2 + 16x - 18y - 12z + 43 = c.$$

Среди этих поверхностей выберем ту, которая проходит через точку M , для чего нужно определить значение c . Подставляя координаты точки M в левую часть уравнения, находим

$$2(-1)^2 - 3 \cdot 1^2 + 16(-1) - 18 \cdot 1 - 12 \cdot 1 + 43 = c,$$

отсюда $c = -4$. Следовательно, уравнение искомой поверхности имеет вид $2x^2 - 3y^2 + 16x - 18y - 12z + 43 = -4$, или $2x^2 - 3y^2 + 16x - 18y - 12z + 47 = 0$.

Выделяя полные квадраты в левой части этого уравнения, получаем

$$2(x+4)^2 - 3(y+3)^2 = 12z - 42 \quad \text{или} \quad \frac{X^2}{3} - \frac{Y^2}{2} = 2Z,$$

где $X = x + 4$, $Y = y + 3$, $Z = z - \frac{7}{2}$.

Итак, поверхностью уровня является гиперболический параболоид.

Определение 1.3. Говорят, что в области (V) задано векторное поле, если каждой точке M этой области ставится в соответствие определенный вектор $\vec{a}(M)$.

Примерами векторных полей могут служить силовые поля (поле тяготения, электрическое и электромагнитное поля) или поле скоростей текучей жидкости.

Рассмотрим сначала стационарные поля, в которых вектор зависит только от точки M и не зависит от времени. Проекции вектора $\vec{a}(M)$ на оси координат обозначим через $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$. Тогда

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}. \quad (\text{I.1})$$

Определение I.4. Если в выбранной системе координат проекции вектора не зависят от одной из трех переменных x, y, z и одна из проекций равна нулю, например:

$$\vec{a}(M) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}, \quad (\text{I.2})$$

то поле называется плоским. С плоскими полями часто приходится встречаться в гидродинамике при изучении плоских течений жидкости, т.е. таких течений, когда все частицы жидкости движутся параллельно некоторой плоскости, причем, скорости частиц, расположенных на одной и той же прямой, перпендикулярной к этой плоскости, одинаковы.

Определение I.5. Векторной линией векторного поля называется линия, в каждой точке которой направление касательной совпадает с направлением вектора в этой точке.



Векторные линии в конкретных полях имеют ясный физический смысл. Так, в поле скоростей текущей жидкости векторные линии суть линии тока этой жидкости, т.е. линии, по которым движутся частицы жидкости.

В электрическом поле векторные линии – силовые линии этого поля. Например, в поле точечного заряда такими линиями будут лучи, выходящие из заряда. Для магнитного поля векторными (силовыми) линиями будут линии, выходящие из северного полюса и оканчивающиеся в южном. Изучение расположения силовых линий в электрических, магнитных и электромагнитных полях особенно важно в физике.

Уравнения векторных линий можно определить из системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} = R(x, y, z), \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

или из системы, записанной в симметрической форме

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \quad (\text{I.4})$$

Обучающая задача 2. Найти векторные линии векторного поля $\vec{a}(M)$

a) $\vec{a}(M) = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$;

b) $\vec{a}(M) = -y\vec{i} + x\vec{j}$.

Решение.

а) Составим систему дифференциальных уравнений, определяющую векторные линии поля

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3, \\ \frac{dy}{dt} = 1, \\ \frac{dz}{dt} = 2. \end{cases}$$

Ее решениями будут прямые линии, задаваемые в параметрической форме

$$\begin{cases} x = 3t + x_0, \\ y = t + y_0, \\ z = 2t + z_0, \end{cases}$$

где x_0, y_0, z_0 – произвольные постоянные.

Таким образом, векторными линиями будут прямые с направляющим вектором $\vec{q} = (3; 1; 2)$.

б) Система, из которой находятся векторные линии, в данном случае имеет вид $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$. Эту систему уравнений можно записать так:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}, \quad dz = 0.$$

Из этих уравнений получаем $x dx + y dy = 0, dz = 0$.

$$\int x dx + \int y dy = C_1, \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1, \quad x^2 + y^2 = 2C_1$$

или $x^2 + y^2 = C_2$, где $C_2 = 2C_1$, т.к. $dz = 0$, то $z = C_3$.

Эти уравнения определяют векторные линии – окружности в плоскости $z = C_3$.

Определение I.6. Часть пространства, ограниченная поверхностью (σ) , называется векторной трубкой, если в каждой точке (σ) нормаль к ней перпендикулярна вектору \vec{a} в той же точке. Если \vec{a} поле скоростей движущейся жидкости, то векторная трубка – это та часть пространства, которую «заметает» при движении некоторый фиксированный объем жидкости.

Определение I.7. Вектор

$$\overline{\text{grad}U} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \quad (\text{I.5})$$

называется градиентом скалярного поля $u(M)$.

Градиент в каждой точке поля направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку, и совпадает с направлением возрастания функции $u(M)$. Примером векторного поля может служить поле градиента скалярного поля $u(M)$, т.е. $\overline{\text{grad}}U$.

Величина градиента

$$|\overline{\text{grad}}U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}. \quad (\text{I.6})$$

Обучающая задача 3. Найти величину и направление градиента скалярного поля $U = x^2 - y^2 + yz - x$ в точке $A(1;0;-1)$.

Решение. Находим частные производные функции U :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y + z; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = y.$$

Таким образом, $\overline{\text{grad}}U = (2x - 1)\bar{i} + (-2y + z)\bar{j} + y\bar{k}$.

Подставляя в последнее равенство координаты точки A , получим $\overline{\text{grad}}U = \bar{i} - \bar{j} = (1; -1; 0)$.

Величина градиента при этом будет $|\overline{\text{grad}}U| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$.

Обучающая задача 4. В каких точках скалярного поля $U = xy + 2z - z^2$ градиент:

- а) коллинеарен вектору $\bar{a}(1; -1; 2)$;
- б) перпендикулярен оси Ox ;
- в) перпендикулярен плоскости $2x + y + z = 1$?

Решение. Вычислим градиент поля

$$\overline{\text{grad}}U = y\bar{i} + x\bar{j} + (2 - 2z)\bar{k} = (y; x; 2 - 2z).$$

а) Для ответа на этот вопрос запишем условие коллинеарности векторов $\overline{\text{grad}}U$ и \bar{a} :

$$\frac{y}{1} = \frac{x}{-1} = \frac{2 - 2z}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{-1}.$$

Это уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(0;0;1)$, с направляющим вектором $\bar{q} = (-1; 1; -1)$.

б) $\bar{i} = (1; 0; 0)$ – направляющий вектор оси Ox . Условием перпендикулярности векторов $\overline{\text{grad}}U$ и \bar{a} является равенство нулю их скалярного произведения: $\overline{\text{grad}}U \cdot \bar{i} = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Уравнение $y = 0$ задает плоскость Oxz . Во всех точках этой плоскости $\overline{\text{grad}}U$ перпендикулярен оси Ox .

с) Поскольку $\overline{\text{grad}U}$ перпендикулярен плоскости $2x + y + z = 1$, то он коллинеарен ее нормальному вектору $\bar{n}(2;1;1)$, т.е. должны выполняться равенства $\frac{y}{2} = \frac{x}{1} = \frac{2-2z}{1} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-1}$. Следовательно, $\overline{\text{grad}U}$ перпендикулярен исходной плоскости в точках прямой, проходящей через точку $M_0(0;0;1)$, с направляющим вектором $\bar{q}(2;4;-1)$.

Обучающая задача 5.

С какой наибольшей скоростью может возрасть функция $U = \frac{10}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$ при переходе точки $M(x,y,z)$ через точку $M_0(-1;2;-2)$?

В каком направлении должна двигаться точка M при переходе через точку $M_1(2;0;1)$, чтобы функция $U(M)$ убывала с наибольшей скоростью?

Решение. Наибольшая по абсолютной величине скорость изменения (возрастания или убывания) функции $U(M)$ при переходе точки M через точку P численно равна модулю градиента функции в точке P . При этом функция будет возрастать или убывать с наибольшей скоростью, смотря по тому, будет ли точка M при переходе через точку P двигаться по направлению градиента функции в точке P или по противоположному направлению.

Руководствуясь этими положениями, находим частные производные функции и ее градиент в любой точке: $\overline{\text{grad}U} = -\frac{20(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k})}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2}$.

Далее находим:

1) $\overline{\text{grad}U}(M_0) = \frac{1}{5}(\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k})$, его модуль, численно равный искомой наибольшей скорости возрастания функции $U(M)$ при переходе M через M_0 , будет $|\overline{\text{grad}U}(M_0)| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$.

2) $\overline{\text{grad}U}(M_1) = -\frac{10}{9}\bar{i} - \frac{5}{9}\bar{k}$; искомый вектор, имеющий противоположное направление, будет $-\overline{\text{grad}U}(M_1) = \frac{10}{9}\bar{i} + \frac{5}{9}\bar{k}$. Чтобы функция $U(M)$ убывала с наибольшей скоростью, при переходе через точку M_1 , точка M должна двигаться в направлении вектора $-\overline{\text{grad}U}(M_1)$.

2. Два студента у доски выполняют задания:

1) Найти линию уровня плоского поля:

a) $U = \frac{y}{x^2}$. *Ответ:* $y = cx^2$.

b) $U = x^2 + y^2 - 2x + 4y - 19$, проходящую через точку $M(2;3)$.

Ответ: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 26$.

2) Найти векторные линии векторного поля $\vec{a}(M)$:

a) $\vec{a} = 4y\vec{i} - 9x\vec{j}$ *Ответ:* $9x^2 + 4y^2 = c_1, z = c_2$.

b) $\vec{a} = 2z\vec{j} + 3y\vec{k}$ *Ответ:* $3y^2 - 2z^2 = c_1, x = c_2$.

с) Найти угол между градиентами поля в указанных точках

$U = \ln \sqrt{x^2 + y^2}; M(1;1), N(1;-1)$ *Ответ:* $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

3. Студенты решают самостоятельно:

1) Найти линию уровня поля, проходящую через указанную точку:

1.1. $U = 4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y - 21; M(1;1)$.

Ответ: $4(x-1)^2 + 9(y+1)^2 = 36$.

1.2. $U = x^2 - 2y^2 + 2x + 4y - 7; M(1;1)$. *Ответ:* $(x+1)^2 - (y-1)^2 = 4$.

1.3. $U = x^2 + 4x - 3y + 10; M(4;15)$. *Ответ:* $(x+2)^2 = 3(y-3)$.

2) Найти поверхность уровня скалярного поля:

2.1. $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. *Ответ:* $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$.

2.2. $u = \frac{xy}{z^2}$. *Ответ:* $xy = cz^2$.

3) Найти поверхность уровня скалярного поля, проходящую через указанную точку M :

3.1. $U = 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 12y - 16z + 5; M(0;0;0)$.

Ответ: $(x-1)^2 + (y+1,5)^2 + (z-2)^2 = \frac{29}{4}$.

3.2. $U = x^2 - 4y^2 + z^2 - 2x + 12y - 4z - 1; M(3;0;0)$.

Ответ: $(x-1)^2 - 4(y-1,5)^2 + (z-2)^2 = -1$.

3.3. $U = 3x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 6x + 16y - 36z + 13; M(-1;1;1)$.

Ответ: $3(x-1)^2 + 4(y+2)^2 + 6(z-3)^2 = 72$.

$$3.4. U = 2x^2 + 3y^2 - 6z^2 - 8x - 6y - 12z - 7; M(1;1;-1).$$

$$\text{Ответ: } 2(x-2)^2 + 3(y-1)^2 - 6(z+1)^2 = 2.$$

$$3.5. U = 6x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 24x - 6y - 4z + 20; M(-2;1;-1).$$

$$\text{Ответ: } 6(x+2)^2 + 3(y-1)^2 - 2(z+1)^2 = 0.$$

$$3.6. U = 3x^2 + 4y^2 - 12x + 8y - 24z + 114; M(2;-1;5).$$

$$\text{Ответ: } 3(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 24(z-5).$$

$$3.7. U = 2x^2 - 3y^2 + 12x + 12y - 12z - 36; M(-3;2;-4).$$

$$\text{Ответ: } 2(x+3)^2 - 3(y-2)^2 = 12(z+4).$$

$$3.8. U = 3x^2 - 4y^2 - 6z^2 - 18x - 8y - 12z + 17; M(3;-1;-1).$$

$$\text{Ответ: } 3(x-3)^2 - 4(y+1)^2 - 6(z+1)^2 = 0.$$

$$3.9. U = 3x^2 + 2z^2 + 6x + 4y - 8z - 9; M(-1;3;2).$$

$$\text{Ответ: } 3(x+1)^2 + 2(z-2)^2 = -4(y-3).$$

$$3.10. U = z^2 - 2y^2 - 8x - 4y - 2z + 16; M(3;-1;1).$$

$$\text{Ответ: } (z-1)^2 - 2(y+1)^2 = 8(x-3).$$

4) Найти векторные линии плоских векторных полей (выполнить один вариант на двоих):

$$4.1. \bar{a} = 4y\bar{i} - 9x\bar{j}.$$

$$\text{Ответ: } 9x^2 + 4y^2 = C_1, z = C_2.$$

$$4.2. \bar{a} = 2x\bar{i} + 4y\bar{j}.$$

$$\text{Ответ: } x^2 = C_1y, z = C_2.$$

$$4.3. \bar{a} = 4z\bar{i} - 9x\bar{k}.$$

$$\text{Ответ: } 9x^2 + 4z^2 = C_1, y = C_2.$$

$$4.4. \bar{a} = 4y\bar{j} + 8z\bar{k}.$$

$$\text{Ответ: } y^2 = C_1z, x = C_2.$$

$$4.5. \bar{a} = 2x\bar{i} + 8z\bar{k}.$$

$$\text{Ответ: } x^4 = C_1z, y = C_2.$$

$$4.6. \bar{a} = 4z\bar{j} - 9y\bar{k}.$$

$$\text{Ответ: } 9y^2 + 4z^2 = C_1, x = C_2.$$

$$4.7. \bar{a} = 5x\bar{i} + 10y\bar{j}.$$

$$\text{Ответ: } x^2 = C_1y, z = C_2.$$

$$4.8. \bar{a} = y\bar{j} + 4z\bar{k}.$$

$$\text{Ответ: } y^4 = C_1z, x = C_2.$$

$$4.9. \bar{a} = 9y\bar{i} - 4x\bar{j}.$$

$$\text{Ответ: } 4x^2 + 9y^2 = C_1, z = C_2.$$

$$4.10. \bar{a} = 6x\bar{i} + 12z\bar{k}.$$

$$\text{Ответ: } x^2 = C_1z, y = C_2.$$

$$4.11. \bar{a} = 4x\bar{i} + y\bar{j}.$$

$$\text{Ответ: } x = C_1y^4, z = C_2.$$

$$4.12. \bar{a} = 7y\bar{j} + 14z\bar{k}.$$

$$\text{Ответ: } y^2 = C_1z, x = C_2.$$

$$4.13. \bar{a} = 9z\bar{j} - 4y\bar{k}$$

$$\text{Ответ: } 4y^2 + 9z^2 = C_1, x = C_2.$$

$$4.14. \bar{a} = 5z\bar{j} + 7y\bar{k}$$

$$\text{Ответ: } 7y^2 - 5z^2 = C_1, x = C_2.$$

$$4.15. \bar{a} = 2x\bar{i} + 6z\bar{k}$$

$$\text{Ответ: } x^3 = C_1z, y = C_2.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Изучить по теоретической части модуля материал к следующему практическому заданию по теме «Поток векторного поля через поверхность. Дивергенция векторного поля. Теорема Остроградского – Гаусса».

2. Найти линию уровня плоского поля:

$$a) U = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\text{Ответ: } x^2 + y^2 = c^2.$$

$$b) U = \frac{x}{y^2}.$$

$$\text{Ответ: } x = cy^2.$$

3. Найти векторные линии плоских векторных полей:

$$a) \bar{a} = 5z\bar{i} + 7x\bar{k}.$$

$$\text{Ответ: } 7x^2 - 5z^2 = c_1, y = c_2.$$

$$b) \bar{a} = 3x\bar{i} - 6z\bar{k}.$$

$$\text{Ответ: } x^2 = \frac{c_1}{z}, y = c_2.$$

4. Найти наибольшую скорость возрастания поля $U(M) = x^y - z$ в точке $M_0(2, 2, 4)$.

$$\text{Ответ: } \overline{\text{grad} U} = 4\bar{i} + 4\ln 2\bar{j} - \bar{k}; |\overline{\text{grad} U}| = \sqrt{17 + 16\ln^2 2}.$$

5. Выполнить свой вариант индивидуального задания (один вариант на двоих).

1. Найти градиент скалярного поля:

$$5.1. U = x^2 - 6xy + y^2 - 10x - 2y + 9.$$

$$\text{Ответ: } (2x - 6y - 10)\bar{i} + (2y - 6x - 2)\bar{j}.$$

$$5.2. U = x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x - 3y + 12.$$

$$\text{Ответ: } (2x + 4y + 6)\bar{i} + (8y + 4x - 3)\bar{j}.$$

$$5.3. U = x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 8y - 7.$$

$$\text{Ответ: } (2x - 2y + 4)\bar{i} + (2y - 2x - 8)\bar{j}.$$

$$5.4. U = x^2 + 3xy - 5y^2 + 7y - 4x + 9.$$

$$\text{Ответ: } (2x + 3y - 4)\bar{i} + (-10y + 3x + 7)\bar{j}.$$

5.5. $U = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ответ: $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\bar{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\bar{j}$.

5.6. $U = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xz + yz - xy$.
 Ответ: $(2x - z - y)\bar{i} + (4y - x + z)\bar{j} + (6z - x + y)\bar{k}$.

5.7. $U = x^2yz - xy^2z + xyz^2$.
 Ответ: $(2xyz - y^2z + yz^2)\bar{i} + (x^2z - 2xyz + xz^2)\bar{j} + (x^2y - xy^2 + 2xyz)\bar{k}$.

2. Найдите величину и направление градиента скалярного поля:

5.8. $U = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ в точке $M_0(2, 1, -1)$.
 Ответ: $U(M_0) = 15\bar{i} + 9\bar{j} - 3\bar{k}$, $|\text{grad}U(M_0)| = 3\sqrt{35}$.

5.9. $U = x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 2y + 5$ в точке $M_0(7, 4)$.
 Ответ: $\overline{\text{grad}U}(M_0) = 10\bar{i} + 8\bar{j}$, $|\overline{\text{grad}U}(M_0)| = 2\sqrt{41}$.

5.10. $U = x^2y + y^2z + z^2x$ в точке $M_0(1, 1, 1)$.
 Ответ: $\overline{\text{grad}U}(M_0) = 3\bar{i} + 3\bar{j} + 3\bar{k}$, $|\overline{\text{grad}U}(M_0)| = 3\sqrt{3}$.

5.11. $U = x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 2y + 5$ в точке $M_0(4, 5)$.
 Ответ: $\overline{\text{grad}U}(M_0) = 2\bar{i} + 20\bar{j}$, $|\overline{\text{grad}U}(M_0)| = 2\sqrt{101}$.

5.12. Найти угол между градиентами полей $W = x^3 + y^3 + z^3$, $U = x^2 - y^2 + z^2$ в точке $M(1, -1, 1)$.
 Ответ: $\varphi = 0^\circ$.

5.13. Найти угол между градиентами скалярных полей $U = xyz$, $W = yz + xz + xy$ в точке $M(1, -1, 2)$.
 Ответ: $\arccos \frac{4}{3\sqrt{10}}$.

5.14. Дано скалярное поле $U = \frac{x^2y^3}{z^2}$. В каком направлении функция U будет возрастать быстрее всего, если исходить из точки $A(1, 2, -1)$.
 Ответ: $\overline{\text{grad}U} = 16\bar{i} + 12\bar{j} + 16\bar{k}$.

5.15. Найти угол между градиентами поля $U = x^2 + 2y^2 - z^2$ в точках $P_1(2, 3, -1)$ и $P_2(1, -1, 2)$.
 Ответ: $\arccos \frac{-4}{\sqrt{41}}$.

II. Поток векторного поля через поверхность. Дивергенция векторного поля. Теорема Остроградского – Гаусса

1. Просмотр выполнения домашнего задания.
2. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала и информационной таблицы.

а) Определение потока и его вычисление методом проектирования на одну из координатных плоскостей.

Пусть в области (Ω) задано некоторое векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, где $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – непрерывно дифференцируемые в области (Ω) функции. Пусть $(\sigma) \in (\Omega)$ – гладкая ориентированная поверхность, на которой выбрана определенная сторона, задаваемая единичной нормалью $\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ к этой поверхности.

Определение II.1. Поток вектора через поверхность (σ) называется интеграл по поверхности от скалярного произведения векторного поля на единичный вектор нормали к поверхности:

$$\Pi = \iint_{(\sigma)} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 d\sigma, \quad (\text{II.1})$$

или в координатной форме

$$\Pi = \iint_{(\sigma)} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma. \quad (\text{II.2})$$

Если поверхность (σ) задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \quad (\text{II.3})$$

то единичный вектор нормали:

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{\overline{\text{grad} F}}{|\overline{\text{grad} F}|} = \pm \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}, \quad (\text{II.4})$$

причем, знак в правой части берется так, чтобы получить нормальный вектор \vec{n}_0 именно к выбранной стороне поверхности.

Если поверхность (σ) задана уравнением

$$z = f(x, y), \quad (\text{II.5})$$

то

$$\bar{n}_0 = \pm \frac{-\frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}. \quad (\text{II.6})$$

Знак плюс соответствует выбору верхней стороны поверхности, нормаль к которой образует острый угол с осью Oz и, следовательно, $\cos \gamma$ (т.е. коэффициент в формуле (II.6) при \bar{k}) положителен. Знак минус отвечает нижней стороне поверхности.

Если поверхность (σ) взаимно однозначно проектируется на плоскость xOy в область (D_{xy}) , то вычисление потока векторного поля \bar{a} через (σ) сводится к вычислению двойного интеграла по области (D_{xy}) по формуле

$$P = \iint_{(\sigma)} \bar{a} \cdot \bar{n}_0 d\sigma = \iint_{(D_{xy})} \left. \frac{\bar{a} \cdot \bar{n}}{|\cos \gamma|} \right|_{z=f(x,y)} dx dy, \quad (\text{II.7})$$

где $\cos \gamma$ – коэффициент при \bar{k} в формуле (II.6), если уравнение поверхности задано в виде (II.5).

Если такая поверхность (σ) задана неявным уравнением (II.3), то $\cos \gamma$ есть коэффициент при \bar{k} в формуле (II.4), а $z = f(x, y)$ определяется из этого уравнения.

Аналогично, если поверхность (σ) взаимно однозначно проектируется на плоскость yOz или zOx , поток вычисляется по формулам:

$$P = \iint_{(D_{yz})} \left. \frac{\bar{a} \cdot \bar{n}_0}{|\cos \alpha|} \right|_{x=x(y,z)} dy dz, \quad P = \iint_{(D_{zx})} \left. \frac{\bar{a} \cdot \bar{n}_0}{|\cos \beta|} \right|_{y=y(x,z)} dx dz. \quad (\text{II.8})$$

Замечание II.1. В более сложных задачах, когда поверхность (σ) состоит из нескольких частей (σ_1) , (σ_2) и т.д., то

$$P = \iint_{(\sigma)} \bar{a} \cdot \bar{n}_0 d\sigma = \iint_{(\sigma_1)} \bar{a} \cdot \bar{n}_0 d\sigma + \iint_{(\sigma_2)} \bar{a} \cdot \bar{n}_0 d\sigma + \dots \quad (\text{II.9})$$

Замечание II.2. Если обозначить через a_n проекцию вектора \bar{a} на направление вектора \bar{n}_0 , то учитывая, что имеет место равенство $\bar{a} \cdot \bar{n}_0 = |\bar{a}| \cdot |\bar{n}_0| \cos \varphi = |\bar{a}| \cos \varphi = a_n$, (где φ – угол между векторами \bar{a} и \bar{n}_0), формулу для вычисления потока можно записать в виде

$$P = \iint_{(\sigma)} a_n d\sigma. \quad (\text{II.10})$$

Замечание II.3. Если вектор \bar{a} определяет поле скоростей текущей жидкости, то интеграл Π выражает количество жидкости, протекающей через поверхность (σ) за единицу времени. При этом, если (σ) – замкнутая поверхность, ограничивающая область (V) , и если интеграл берется по внешней стороне (σ) , то величина Π называется потоком вектора \bar{a} изнутри поверхности (σ) ; она дает разность между количествами жидкости вытекшей из области и втекшей в эту область за единицу времени (предполагается, что жидкость может спокойно протекать через поверхность (σ)).

При $\Pi > 0$ из области (V) вытекает жидкости больше, чем в нее втекает, что указывает на наличие в этой области источников, питающих поток жидкости. При $\Pi < 0$ из области (V) вытекает жидкости меньше, чем в нее втекает, что указывает на наличие в этой области стоков, где жидкость удаляется из потока. При $\Pi = 0$ из области (V) вытекает жидкости столько же, сколько в нее втекает.

Замечание II.4. Если $U(x, y, z)$ – поле температур внутри некоторого тела, k – коэффициент теплопроводности, то, согласно закону Фурье, за единицу времени через элемент поверхности $d\sigma$ протекает количество тепла

$$dQ = -k(\overline{\text{grad}U} \cdot \bar{n}_0) d\sigma. \quad (\text{II.11})$$

Вектор $\bar{q} = -k \cdot \overline{\text{grad}U}$ называют вектором потока тепла.

Отсюда следует, что количество тепла Q , протекающее в единицу времени через поверхность (σ) , равна потоку вектора \bar{q} .

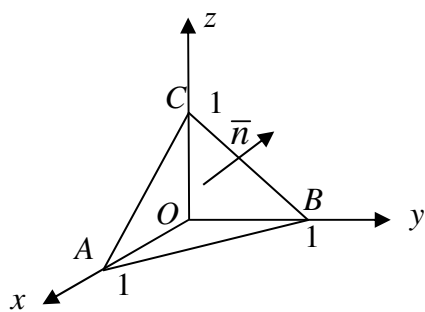
$$Q = \Pi(\bar{q}) = \iint_{(\sigma)} (\bar{q} \cdot \bar{n}_0) d\sigma. \quad (\text{II.12})$$

Обучающая задача 1.

Найти поток векторного поля $\bar{a} = (x - 2z)\bar{i} + (3z - 4x)\bar{j} + (5x + y)\bar{k}$ через верхнюю часть плоскости $x + y + z - 1 = 0$, расположенную в октанте $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Решение. Поверхность (σ) представляет собой $\triangle ABC$. Треугольник ABC однозначно проектируется, например, на плоскость xOy . Принимая $F(x, y, z) = x + y + z - 1$, найдем единичный вектор нормали к этой плоскости:

$$\bar{n}_0 = \frac{\overline{\text{grad}F}}{|\overline{\text{grad}F}|} = \frac{\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{3}}.$$



Здесь $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$, что соответствует внешней стороне треугольника.

(Если бы требовалось найти поток через внутреннюю сторону поверхности, то вместо вычисления вектора \bar{n}_0 , надо было взять вектор $\bar{n}_1 = -\bar{n}_0$, т.е. изменить знаки у коэффициентов при $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ на противоположные).

После этого находим

$$\frac{\bar{a} \cdot \bar{n}_0}{|\cos \gamma|} = \frac{1}{\sqrt{3}} ((x - 2z) + (3z - 4x) + (5x + y)) \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2x + y + z.$$

Из уравнения плоскости треугольника получаем $z = 1 - x - y$, и поэтому $\left. \frac{\bar{a} \cdot \bar{n}_0}{|\cos \gamma|} \right|_{z=z(x,y)} = 2x + y + (1 - x - y) = x + 1.$

Так как проекция $\triangle ABC$ на плоскость xOy есть треугольник AOB , то по формуле (II.7) найдем $\iint_{(\triangle ABC)} \left. \frac{\bar{a} \cdot \bar{n}_0}{|\cos \gamma|} \right|_{z=z(x,y)} dx dy = \iint_{(\triangle AOB)} (x + 1) dx dy =$

$$= \int_0^1 (x + 1) dx \int_0^{1-x} dy = \int_0^1 (1 - x^2) dx = \frac{2}{3}.$$

Обучающая задача 2.

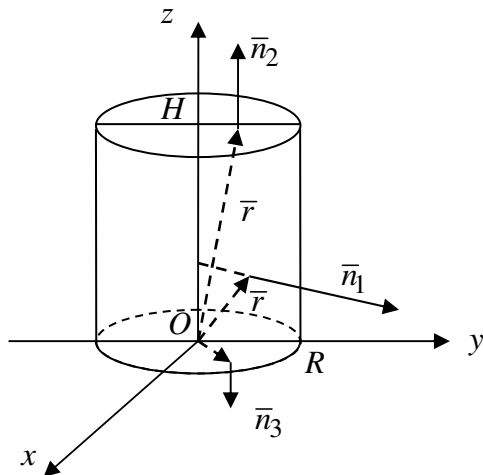
Найти поток радиуса-вектора $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ через внешнюю сторону поверхности прямого кругового цилиндра, если начало координат совпадает с центром нижнего основания цилиндра, R – радиус основания цилиндра, H – его высота.

Решение. Для вычисления потока вектора \bar{r} через внешнюю сторону

поверхности цилиндра, нужно подсчитать поток этого вектора через боковую поверхность, верхнее основание и нижнее основание цилиндра. Проекция радиуса-вектора на нормаль к боковой поверхности равна радиусу основания цилиндра, т.е. $r_n = R$; тогда

$$П_{\text{б.пов.}} = \iint_{(\sigma)} R d\sigma = R \cdot S_{\text{бок. пов.}} = 2\pi R^2 H.$$

Проекция радиуса-вектора на нормаль к верхнему основанию равна H ,



следовательно, $\Pi_{\text{в. осн.}} = H \iint_{(\sigma)} d\sigma = H \cdot S_{\text{осн.}} = \pi R^2 H$. Проекция радиуса-

вектора \vec{r} на внешнюю нормаль к нижнему основанию цилиндра равна нулю, поэтому $\Pi_{\text{н. осн.}} = 0$.

Таким образом, поток вектора \vec{r} через внешнюю сторону поверхности цилиндра равен $\Pi = 2\pi R^2 H + \pi R^2 H = 3\pi R^2 H$.

б) Вычисление потока методом проектирования на все три координатные плоскости.

Пусть поверхность (σ) однозначно проектируется на все три координатные плоскости (ее проекции обозначим соответственно (D_{yz}) , (D_{zx}) , (D_{xy})), тогда ее уравнение $F(x, y, z) = 0$ однозначно разрешимо относительно каждого из аргументов. Если этими решениями являются функции $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$, то поток векторного поля $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ может быть вычислен по формуле

$$\begin{aligned} \Pi = & \pm \iint_{(D_{yz})} P(x(y, z), y, z) dy dz \pm \iint_{(D_{zx})} Q(x, y(x, z), z) dz dx \pm \\ & \pm \iint_{(D_{xy})} R(x, y, z(x, y)) dx dy, \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

где знак перед каждым из двойных интегралов берется в соответствии со знаком $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ на поверхности (σ) . Формула (II.11) получается из формулы (II.2), учитывая, что

$$\cos \alpha d\sigma = dy dz, \quad \cos \beta d\sigma = dx dz, \quad \cos \gamma d\sigma = dx dy.$$

Обучающая задача 4 (второй способ решения обучающей задачи 1).

Найти поток векторного поля $\vec{a} = (x - 2z)\vec{i} + (3z - 4x)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$ через верхнюю часть плоскости $x + y + z - 1 = 0$, расположенную в октанте $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Решим задачу методом проектирования на все три координатные плоскости.

Решение. Здесь

$$x = 1 - (y + z), \quad P(x(y, z), y, z) = 1 - y - z - 2z = 1 - y - 3z;$$

$$y = 1 - x - z, \quad Q(x, y(x, z), z) = 3z - 4x;$$

$$z = 1 - x - y, \quad R(x, y, z(x, y)) = 5x + y.$$

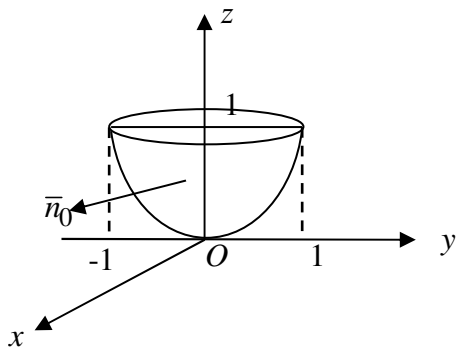
По условию все три направляющие косинусы нормали положительны, поэтому в формуле (II.11) надо взять все три знака «+». Подставляя вычисленные значения P, Q, R , получим

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \iint_{(D_{yz})} (1-y-3z) dydz + \iint_{(D_{zx})} (3z-4x) dzdx + \iint_{(D_{xy})} (5x+y) dx dy = \\
 &= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (1-y-3z) dz + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (3z-4x) dz + \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (5x+y) dx = \\
 &= \int_0^1 dy \left(z - yz - \frac{3z^2}{2} \right) \Big|_0^{1-y} + \int_0^1 dx \left(\frac{3z^2}{2} - 4xz \right) \Big|_0^{1-x} + \int_0^1 dy \left(\frac{5x^2}{2} + yx \right) \Big|_0^{1-y} = \\
 &= \int_0^1 (1-y-y+y^2 - \frac{3}{2}(1-y)^2) dy + \int_0^1 (\frac{3}{2}(1-x)^2 - 4x + 4x^2) dx + \\
 &+ \int_0^1 (\frac{5}{2}(1-y)^2 + y - y^2) dy = y - y^2 + \frac{y^3}{3} + \frac{(1-y)^3}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2}(1-x)^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 \Big|_0^1 - \\
 &- \frac{5}{6}(1-y)^3 + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = 1 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 + \frac{4}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

Обучающая задача 5.

Найти поток векторного поля $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ через внешнюю сторону параболоида $z = x^2 + y^2$, удовлетворяющая условию $z \leq 1$.

Решение. Изобразим поверхность (σ) . Из геометрических соображений

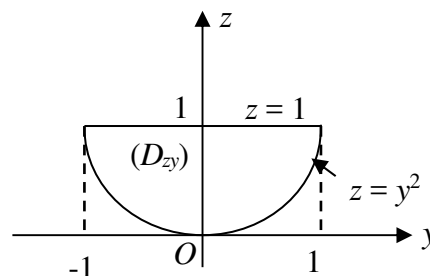


понятно, что единичная нормаль \vec{n}_0 (т.к. она внешняя) образует тупой угол с осью Oz . Также ясно, что она образует острый угол с осью Ox в тех точках, где $x \geq 0$ и тупой в тех точках, где $x < 0$. Аналогично, \vec{n}_0 образует острый (тупой) угол с осью Oy в точках, где выполняется неравенство $y \geq 0$ ($y < 0$). Для вычисления потока воспользуемся формулой

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \iint_{(\sigma)} P dydz + \iint_{(\sigma)} Q dzdx + \iint_{(\sigma)} R dx dy = \\
 &= \iint_{(\sigma)} dydz + dzdx + z dx dy = \iint_{(\sigma)} dydz + \iint_{(\sigma)} dzdx + \iint_{(\sigma)} z dx dy.
 \end{aligned}$$

Вычислим каждый из трех интегралов отдельно. Для вычисления интеграла $\iint_{(\sigma)} dydz$

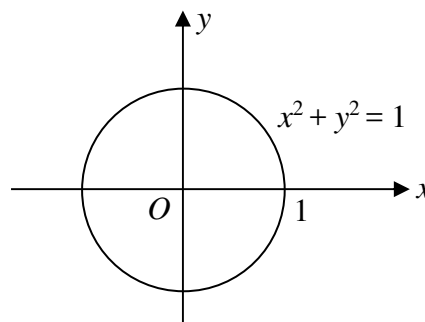
разобьем поверхность (σ) на две части (σ_1) и (σ_2) плоскостью Ozy ((σ_1) отвечает той части параболоида, где $x \geq 0$). Необходимость решения продиктована, как уже отмечалось выше, тем фактором, что нормаль \vec{n}_0 на (σ_1) образует острый угол с осью Ox (т.е. $\cos \alpha > 0$), а на (σ_2) – тупой. Проекцией (σ_1) и (σ_2) на плоскость zOy является одна и та же область (D_{zy}) .



$$\text{Следовательно, } \iint_{(\sigma)} dydz = \iint_{(\sigma_1)} dydz + \iint_{(\sigma_2)} dydz = \iint_{(D_{zy})} dydz - \iint_{(D_{zy})} dydz = 0.$$

Знак «-» перед вторым двойным интегралом поставлен постольку, поскольку на (σ_2) нормаль образует тупой угол с осью Ox (или, что то же самое $\cos \alpha < 0$).

Из соображений симметрии понятно, что и $\iint_{(\sigma)} dzdx = 0$.



Осталось вычислить $\iint_{(\sigma)} z dx dy$.

Как отмечалось выше, $\cos \gamma < 0$. Поэтому имеем

$$\iint_{(\sigma)} z dx dy = - \iint_{(D_{xy})} (x^2 + y^2) dx dy,$$

где (D_{xy}) – проекция поверхности (σ) на плоскость xOy .

Для вычисления последнего интеграла перейдем к полярным координатам:

$$- \iint_{(D_{xy})} (x^2 + y^2) dx dy = - \iint_{(D_{xy})} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = - \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^1 = - \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, поток векторного поля равен $-\frac{\pi}{2}$.

Обучающая задача 6.

Найти поток вектора $\vec{a} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности, ограниченной частью сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, расположенной в первом октанте.

Решение.

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{(\sigma)} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 d\sigma = \iint_{(\sigma)} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \\ &= \iint_{(\sigma)} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) d\sigma; \end{aligned}$$

$$\cos \alpha d\sigma = dydz, \text{ т.к. } \alpha \leq 90^\circ;$$

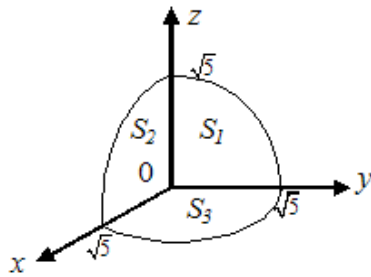
$$\cos \beta d\sigma = dx dz, \text{ т.к. } \beta \leq 90^\circ;$$

$$\cos \gamma d\sigma = dx dy, \text{ т.к. } \gamma \leq 90^\circ.$$

Тогда $\Pi = \iint_{(S_1)} x^2 dydz + \iint_{(S_2)} y^2 dx dz + \iint_{(S_3)} z^2 dx dy = 3 \iint_{(S_1)} x^2 dydz, \quad \text{т.к.}$

подынтегральные выражения симметричны и области (S_1) , (S_2) , (S_3) имеют одинаковую форму.

Найдем $\iint_{(S_1)} x^2 dydz$. Из уравнения поверхности



сти выразим x через y и z : $x^2 = 5 - y^2 - z^2$.

Перейдем от двойного интеграла к двукратному в полярной системе координат:

$$y = \rho \cos \varphi, \quad z = \rho \sin \varphi; \quad dydz = \rho d\rho d\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \rho \leq \sqrt{5}.$$

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \iint_{(S_1)} (5 - y^2 - z^2) dydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{5}} (5 - \rho^2) \rho d\rho = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{5}} (5\rho - \rho^3) d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{5}{2} \rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{5}} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{25}{2} - \frac{25}{4} \right) d\varphi = \frac{25}{4} \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{25}{8} \pi. \end{aligned}$$

Аналогично находим $\iint_{(S_2)} y^2 dx dz = \frac{25}{8} \pi$ и $\iint_{(S_3)} z^2 dx dy = \frac{25}{8} \pi$. Тогда по-

ток вектора \vec{a} через внешнюю сторону поверхности, ограниченной частью сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, будет $\Pi = \frac{25}{8} \pi + \frac{25}{8} \pi + \frac{25}{8} \pi = \frac{75}{8} \pi$.

Примечание. – Еще раз обращаем внимание, что при переходе от поверхностного интеграла к двойному необходимо следить за ориентацией поверхности в пространстве. Те части поверхности, где углы α , β , γ тупые, при проектировании на соответствующие плоскости приводят к соотношениям:

$$\cos \alpha d\sigma = -dydz, \quad \cos \beta d\sigma = -dx dz, \quad \cos \gamma d\sigma = -dx dy.$$

в) Дивергенция векторного поля. Формула Остроградского – Гаусса.

Определение II.2. Дивергенцией или расходимостью векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M называется предел отношения потока вектора через поверхность, окружающую точку M , к объему, ограниченному этой поверхностью, при условии, что вся поверхность стягивается в точку M . Обозначается

$$\operatorname{div} \vec{a}(M_0) = \lim_{(\sigma)} \frac{\iint \vec{a} \cdot \vec{n}_0 d\sigma}{V},$$

где предел вычисляется при условии, что вся поверхность стягивается в точку M . Этот предел характеризует плотность или мощность источников (стоков) в точке M и представляет собой скалярную величину.

Если $\operatorname{div} \vec{a}(M) > 0$, то точка M_0 называется источником, а если $\operatorname{div} \vec{a}(M) < 0$, то точка M_0 называется стоком, так как в первом случае в любой бесконечно малой области, окружающей точку M_0 , жидкость возникает, а во втором случае она исчезает.

Дивергенция векторного поля

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

выражается формулой $\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, где значения частных производных берутся в точке M .

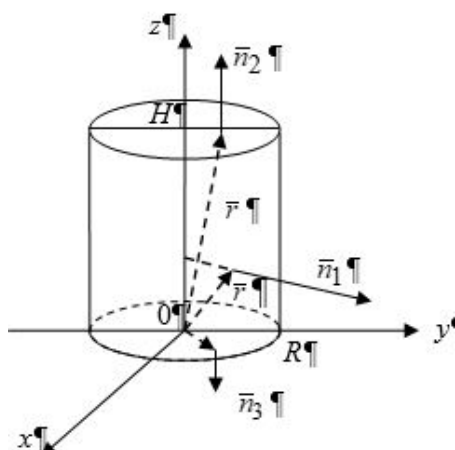
Согласно формуле Остроградского – Гаусса поток и дивергенция векторного поля связаны между собой равенством

$$\begin{aligned} \Pi = \iint_{(+\sigma)} P dx dy + Q dx dz + R dx dy = \\ = \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{a} dV, \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

которое имеет следующий смысл: *поток векторного поля через замкнутую поверхность (σ) равен тройному интегралу по области (V), ограниченной этой поверхностью, от дивергенции поля.*

Обучающая задача 7 (второй способ решения обучающей задачи 2).

Найти поток радиуса-вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности прямого кругового цилиндра, если начало координат сов-



падает с центром нижнего основания цилиндра, R – радиус основания цилиндра, H – его высота.

Решение.

Решим задачу, используя формулу Остроградского – Гаусса. (Здесь поверхность (σ) является замкнутой).

Вычислим дивергенцию поля

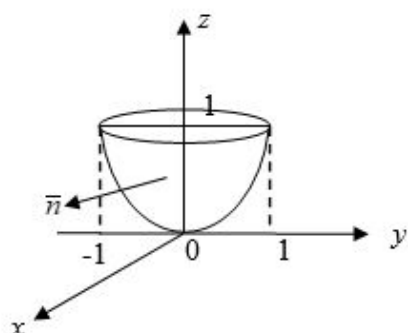
$$\operatorname{div} \vec{a} = (x)'_x + (y)'_y + (z)'_z = 1 + 1 + 1 = 3,$$

тогда

$$\Pi = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{a} dV = \iiint_{(V)} 3dV = 3 \iiint_{(V)} dV = 3V = 3\pi R^2 H.$$

Обучающая задача 8 (второй способ решения обучающей задачи 5).

Найти поток векторного поля $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ через внешнюю сторону параболоида $z = x^2 + y^2$, удовлетворяющая условию $z \leq 1$.



Решение.

Решим задачу, используя формулу Остроградского – Гаусса. Для этого рассмотрим тело (V) , границей которого служит поверхность параболоида $z = x^2 + y^2$ (σ_1) и плоскость $z = 1$ (σ_2). Найдем поток через замкнутую поверхность $(\sigma) = (\sigma_1) \cup (\sigma_2)$, являющуюся объединением поверхностей (σ_1) и (σ_2) , возьмем внешнюю нормаль \vec{n} . Поток Π через замкнутую поверхность (σ) складывается из потоков Π_1 и Π_2 через поверхности (σ_1) и (σ_2) соответственно.

Следовательно, интересующий нас поток может быть найден как разность потоков: $\Pi_1 = \Pi - \Pi_2$. Поток Π найдем по формуле Остроградского – Гаусса.

$$\Pi = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{a} dV. \quad \operatorname{div} \vec{a} = 0 + 0 + 1 = 1.$$

$$\Pi = \iiint_{(V)} 1dV = \iiint_{(V)} dx dy dz = \iiint_{(V)} \rho d\rho d\phi dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^1 dz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \rho d\rho z \Big|_{\rho^2}^1 =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho (1 - \rho^2) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Поток Π_2 через плоскость $z=1$ может быть вычислен довольно просто. Внешней единичной нормалью к плоскости $z=1$ является вектор $\vec{n}_0(0;0;1)$. Поэтому $\Pi_2 = \iint_{(\sigma_2)} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{(\sigma_2)} z d\sigma$.

Поскольку $z=1$ на (σ_2) , а элемент площади $d\sigma$ равен элементу площади ее проекции на плоскость $Oxy(dx dy)$, то последний интеграл сводится к двойному $\iint_{(D_{xy})} dx dy$, где (D_{xy}) – круг с центром в начале координат и радиусом $r=1$.

Этот интеграл выражает площадь круга, которая равна $\pi r^2 = \pi$. Следовательно, искомый поток через внешнюю сторону параболоида равен

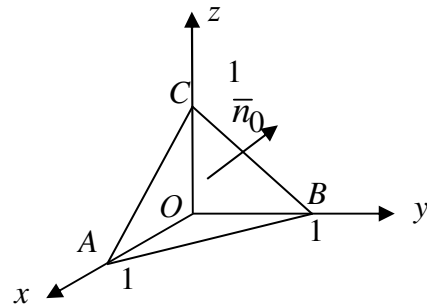
$$\Pi_1 = \Pi - \Pi_2 = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}.$$

Обучающая задача 9 (третий способ решения обучающей задачи 1).

Найти поток векторного поля $\vec{a} = (x-2z)\vec{i} + (3z-4x)\vec{j} + (5x+y)\vec{k}$ через верхнюю часть плоскости $x+y+z-1=0$, расположенную в октанте $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Решение.

Решим задачу, используя формулу Остроградского – Гаусса. (Для данной задачи этот метод является менее рациональным). Рассмотрим пирамиду, границей которой служат поверхности треугольников $\triangle ABC(\sigma_1)$, $\triangle BOC(\sigma_2)$, $\triangle COA(\sigma_3)$, $\triangle AOB(\sigma_4)$.



На замкнутой поверхности $(\sigma) = (\sigma_1) \cup (\sigma_2) \cup (\sigma_3) \cup (\sigma_4)$ возьмем внешнюю нормаль. Поток Π через поверхность (σ) складывается из потоков $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ через поверхности $(\sigma_1), (\sigma_2), (\sigma_3), (\sigma_4)$. Следовательно, интересующий нас поток может быть найден как разность потоков: $\Pi_1 = \Pi - \Pi_2 - \Pi_3 - \Pi_4$.

Поток Π может быть найден по формуле Остроградского – Гаусса:

$$\operatorname{div} \bar{a} = (x - 2z)'_x + (3z - 4x)'_y + (5x + y)'_z = 1 + 0 + 0 = 1.$$

$$\Pi = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \bar{a} dV = \iiint_{(V)} 1 dV = \iiint_{(V)} dV = V.$$

Последний интеграл представляет собой объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\square} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

Отсюда $\Pi = \frac{1}{6}$.

Найдем поток через поверхность $(\sigma_2) \Delta BOC$. Треугольник BOC лежит в плоскости yOz . Внешним вектором нормали к ΔBOC будет вектор $\bar{n}_0 = -\bar{i}$, а уравнением плоскости ΔBOC : $x = 0$, поэтому

$$\left. \frac{\bar{a} \cdot \bar{n}_0}{|\cos \alpha|} \right|_{x=0} = \left. \frac{-(x - 2z)}{|-1|} \right|_{x=0} = 2z.$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } \Pi_2 &= \iint_{(\sigma_2)} \left. \frac{\bar{a} \cdot \bar{n}_0}{|\cos \alpha|} \right|_{x=0} dydz = \iint_{(\Delta BOC)} 2z dydz = \\ &= \int_0^1 2z dz \int_0^{1-z} dy = 2 \int_0^1 z(1-z) dz = 2 \int_0^1 (z - z^2) dz = \\ &= 2 \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Найдем поток через поверхность $(\sigma_3) \Delta COA$. Треугольник COA лежит в плоскости xOz . Внешним вектором нормали к ΔBOC будет вектор $\bar{n}_0 = -\bar{j}$, а уравнением плоскости ΔCOA : $y = 0$, поэтому

$$\left. \frac{\bar{a} \cdot \bar{n}_0}{|\cos \beta|} \right|_{y=0} = \left. \frac{-(3z - 4x)}{|-1|} \right|_{y=0} = 4x - 3z.$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } \Pi_3 &= \iint_{(\sigma_3)} \left. \frac{\bar{a} \cdot \bar{n}_0}{|\cos \beta|} \right|_{y=0} dx dz = \iint_{(\Delta COA)} (4x - 3z) dx dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (4x - 3z) dz = \int_0^1 -\frac{1}{2} (11x^2 - 14x + 3) dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{11x^3}{3} - \frac{14x^2}{2} + 3x \right) \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{11}{3} - 7 + 3 \right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Найдем поток через поверхность (σ_4) ΔAOB . Треугольник AOB лежит в плоскости xOy . Внешним вектором нормали к ΔAOB будет вектор $\vec{n}_0 = -\vec{k}$, а уравнением плоскости ΔAOB : $z = 0$, поэтому

$$\left. \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}_0}{|\cos \gamma|} \right|_{z=0} = \left. \frac{-(5x+y)}{|-1|} \right|_{z=0} = -5x - y.$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } P_4 &= \iint_{(\sigma_4)} \left. \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}_0}{|\cos \gamma|} \right|_{z=0} dxdy = \iint_{(\Delta AOB)} (-5x - y) dxdy = \\ &= - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (5x + y) dy = - \frac{1}{2} \int_0^1 (9x^2 - 8x - 1) dx = - \frac{1}{2} \left(\frac{9x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} - x \right) \Big|_0^1 = \\ &= - \frac{1}{2} (3 - 4 - 1) = -1. \end{aligned}$$

Следовательно, искомый поток через поверхность ΔABC будет

$$P_1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + 1 = \frac{2}{3}.$$

3. Два студента у доски выполняют задания:

3.1. Найти поток векторного поля $\vec{a} = (x+z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x-y)\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью $3x+2y+z=6$ и координатными плоскостями, двумя способами: а) используя определение потока; б) используя формулу Остроградского – Гаусса.

Ответ: 6.

3.2. Найти поток векторного поля $\vec{a} = (x-1)\vec{i} + (y+3)\vec{j} + z\vec{k}$ через боковую поверхность конуса $z^2 = x^2 + y^2$, заключенную между плоскостями $z=0$ и $z=1$ в направлении внешней нормали.

Ответ: 0.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

(выполнить один вариант на двоих)

I. Найти поток векторного поля \vec{a} через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью (P) и координатными плоскостями, двумя способами: а) используя определение потока; б) используя формулу Остроградского – Гаусса.

1. $\vec{a} = 3x\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x-z)\vec{k}$, (P) : $x+3y+z=3$. Ответ: $\frac{9}{2}$.

2. $\vec{a} = (3x-1)\vec{i} + (y-x+z)\vec{j} + 4z\vec{k}$, (P) : $2x-y-2z=2$. Ответ: $\frac{8}{3}$.

3. $\bar{a} = x\bar{i} + (x+z)\bar{j} + (y+z)\bar{k}$, (P): $3x+3y+z=3$. Ответ: 1.
4. $\bar{a} = z\bar{i} + (x+y)\bar{j} + y\bar{k}$, (P): $2x+y+2z=2$. Ответ: $\frac{1}{3}$.
5. $\bar{a} = (2y-z)\bar{i} + (x+2y)\bar{j} + y\bar{k}$, (P): $x+3y+2z=6$. Ответ: 12.
6. $\bar{a} = (y+z)\bar{i} + (x+6y)\bar{j} + y\bar{k}$, (P): $x+2y+2z=2$. Ответ: 2.
7. $\bar{a} = (y+z)\bar{i} + (2x-z)\bar{j} + (y+3z)\bar{k}$, (P): $2x+y+3z=6$. Ответ: 18.
8. $\bar{a} = (3x+y)\bar{i} + (x+z)\bar{j} + y\bar{k}$, (P): $x+2y+z=2$. Ответ: 2.
9. $\bar{a} = (x+z)\bar{i} + z\bar{j} + (2x-y)\bar{k}$, (P): $2x+2y+z=4$. Ответ: $\frac{8}{3}$.
10. $\bar{a} = (2y-z)\bar{i} + (x+y)\bar{j} + x\bar{k}$, (P): $x+2y+2z=4$. Ответ: $\frac{8}{3}$.
11. $\bar{a} = (x+y+z)\bar{i} + 2z\bar{j} + (y-7z)\bar{k}$, (P): $2x+3y+z=6$. Ответ: -36.
12. $\bar{a} = (x+y)\bar{i} + (y+z)\bar{j} + 2(x+z)\bar{k}$, (P): $3x-2y+2z=6$. Ответ: 12.
13. $\bar{a} = 4z\bar{i} + (x-y-z)\bar{j} + (3y+z)\bar{k}$, (P): $x-2y+2z=2$. Ответ: 0.
14. $\bar{a} = (x+2z)\bar{i} + (y-3z)\bar{j} + z\bar{k}$, (P): $3x+2y+2z=6$. Ответ: 9.
15. $\bar{a} = x\bar{i} + (y-2z)\bar{j} + (2x-y+2z)\bar{k}$, (P): $x+2y+2z=2$. Ответ: $\frac{4}{3}$.

II. Найти поток векторного поля \bar{a} через замкнутую поверхность (σ) (нормаль внешняя): а) непосредственно; б) по теореме Остроградского – Гаусса.

1. $\bar{a} = x\bar{i} + z\bar{k}$; $(\sigma): z = x^2 + y^2, z = 4$. Ответ: 16π .
2. $\bar{a} = 3x\bar{i} - z\bar{j}$; $(\sigma): z^2 = x^2 + y^2 (z \geq 0), z = 6 - x^2 - y^2$. Ответ: 32π .
3. $\bar{a} = (z+y)\bar{i} + y\bar{j} - x\bar{k}$; $(\sigma): z^2 + x^2 = 2y, y = 2$. Ответ: 4π .
4. $\bar{a} = x\bar{i} - 2y\bar{j} - z\bar{k}$; $(\sigma): 1 - z = x^2 + y^2, z = 0$. Ответ: $-\pi$.
5. $\bar{a} = xy\bar{i} - y^2\bar{j} - yz\bar{k}$; $(\sigma): x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ I октант.
Ответ: $-\frac{2}{15}\pi$.
6. $\bar{a} = x\bar{i} + 2y\bar{j} - z\bar{k}$; $(\sigma): x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Ответ: $\frac{64}{3}\pi$.
7. $\bar{a} = 2x\bar{i} - (z-1)\bar{k}$; $(\sigma): x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 1$. Ответ: 4π .

8. $\bar{a} = x\bar{i} + 2y\bar{j} - z\bar{k}$; $(\sigma): z^2 = x^2 + y^2, z = x^2 + y^2$. Ответ: $\frac{\pi}{3}$.
9. $\bar{a} = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} - z\bar{k}$; $(\sigma): z^2 = x^2 + y^2, z = H, H > 0$. Ответ: πH^3 .
10. $\bar{a} = (x^2 + y^2)\bar{i} + (y^2 + x^2)\bar{j} + (y^2 + z^2)\bar{k}$; $(\sigma): x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1$.
Ответ: π .
11. $\bar{a} = x\bar{i} - z\bar{j}$; $(\sigma): z = 6 - x^2 - y^2, z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$. Ответ: $\frac{32}{3}\pi$.
12. $\bar{a} = y^2\bar{i} + x^2\bar{j} - 3y^2z\bar{k}$; $(\sigma): z^2 = x^2 + y^2, z = 4$. Ответ: $-\frac{768}{5}\pi$.
13. $\bar{a} = 3x\bar{i} - y\bar{j} - z\bar{k}$; $(\sigma): 9 - z = x^2 + y^2, x = 0, y = 0, z = 0$. Ответ: $\frac{81}{8}\pi$.
14. $\bar{a} = 2x\bar{i} - y\bar{j} + z\bar{k}$; $(\sigma): 9 - z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 9$. Ответ: 81π .
15. $\bar{a} = 3x\bar{i} - z\bar{k}$; $(\sigma): z^2 = x^2 + y^2 (z \geq 0), z = 6 - x^2 - y^2$. Ответ: $\frac{64}{3}\pi$.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Изучить по теоретической части модуля материал к следующему практическому занятию по теме «Циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля. Теорема Стокса».

2. Найти поток векторного поля $\bar{a} = (2y + z)\bar{i} + (x - y)\bar{j} - 2z\bar{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью $x - y + z = 2$ и координатными плоскостями, двумя способами: а) используя определение потока; б) используя формулу Остроградского – Гаусса.

Ответ: -4 .

3. Пользуясь формулой Остроградского – Гаусса, вычислить поток векторного поля $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ через замкнутую поверхность (σ) в направлении внешней нормали: (σ) – поверхность куба $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$.

Ответ: $3a^4$.

4. Найти поток векторного поля $\bar{a} = 2x\bar{i} - y\bar{j} + 3\bar{k}$ через замкнутую внешнюю сторону поверхности $9 - z = x^2 + y^2, z = 0, 0 \leq z \leq 9$.

Ответ: $\frac{81}{2}\pi$.

III. Циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля. Теорема Стокса

1. Просмотр выполнения домашнего задания.
2. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала.

Определение III.1. Линейным интегралом вектора

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

вдоль линии (L) называется криволинейный интеграл вида

$$\int_{(L)} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz, \quad (\text{III.1})$$

где $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ – вектор, принадлежащий касательной $\vec{\tau}$ к кривой (L) в направлении обхода (направление обхода считается положительным). В силовом поле он выражает работу сил поля при перемещении точки вдоль линии (L) .

Определение III.2. В случае замкнутой кривой этот интеграл называется циркуляцией поля вектора \vec{a} по контуру (L)

$$C = \oint_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz. \quad (\text{III.2})$$

Циркуляция характеризует вращательную способность поля на контуре (L) .

Определение III.3. Ротором (или вихрем) векторного поля, определяемого вектором \vec{a} , называется вектор

$$\overline{\text{rot} \vec{a}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (\text{III.3})$$

Если через точку M поля \vec{a} провести плоскость (P) , определяемую единичным нормальным вектором \vec{n}_0 , то скалярное произведение $\overline{\text{rot} \vec{a}}(M) \cdot \vec{n}_0$ характеризует вращательную способность этого поля в точке M . Она зависит как от координат точки M , так и от направления плоскости (P) и достигает наибольшей величины, равной $|\overline{\text{rot} \vec{a}}(M)|$, когда плоскость (P) перпендикулярна вектору $\overline{\text{rot} \vec{a}}(M)$.

Пусть (σ) – гладкая ориентируемая поверхность, (L) – замкнутая гладкая кривая, являющаяся границей поверхности (σ) , векторное поле $\vec{a} = (P, Q, R)$ непрерывно дифференцируемо на (σ) и (L) . Тогда имеет место формула Стокса

$$\oint_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (\text{III.4})$$

причем направление контура (L) и сторона поверхности (σ) согласуются по следующему правилу: при обходе контура (L) по стороне интегрирования поверхности (σ) прилежащая к нему часть (σ) должна быть слева. Левый интеграл в формуле (III.4) представляет собой циркуляцию векторного поля \vec{a} вдоль контура (L) , а правый – поток ротора этого поля через поверхность (σ) , т.е.

$$C = \oint_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{(\sigma)} \text{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 d\sigma \quad (\text{III.5})$$

В случае, когда векторное поле $\vec{a} = (P, Q)$ плоское, формула Стокса принимает вид формулы Грина:

$$\oint_{(L)} Pdx + Qdy = \iint_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (\text{III.6})$$

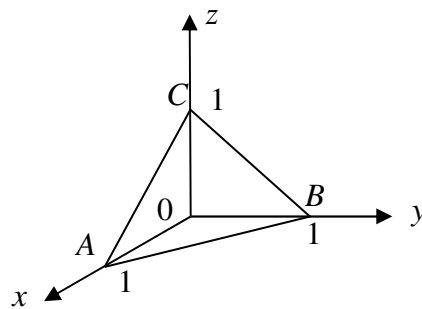
Итак, поток ротора поля через поверхность (σ) равен циркуляции вектора по границе этой поверхности.

Обучающая задача 1. Найти циркуляцию поля вектора $\vec{a} = (x-2)\vec{i} + (x+y)\vec{j} - 2z\vec{k}$ вдоль периметра треугольника с вершинами $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.

Решение.

1-й способ. Периметр $ABCA$ треугольника состоит из трех отрезков, которые лежат на прямых, имеющих различные уравнения. Поэтому криволинейный интеграл по контуру $ABCA$ вычислим как сумму интегралов по отрезкам AB , BC и CA .

Составим уравнения прямой AB , как пересечение плоскостей: $x+y=1$, $z=0$, и исходя из этих уравнений преобразуем криволинейный интеграл по отрезку AB в опре-



деленный интеграл с переменной x , учитывая, что $y = 1 - x \Rightarrow dy = -dx$; $z = 0 \Rightarrow dz = 0$.

$$\begin{aligned} \int_{(AB)} (x-2)dx + (x+y)dy - 2zdz &= \int_1^0 ((x-2)dx + (x+1-x) \cdot (-dx) - 2 \cdot 0) = \\ &= \int_1^0 (x-2-1)dx = \int_1^0 (x-3)dx = \frac{(x-3)^2}{2} \Big|_1^0 = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Для отрезка BC : $y + z = 1$; $x = 0$; $z = 1 - y \Rightarrow dz = -dy$; $x = 0 \Rightarrow dx = 0$.

$$\begin{aligned} \int_{(BC)} (x-2)dx + (x+y)dy - 2zdz &= \int_1^0 0 + ydy - 2(1-y)(-dy) = \\ &= \int_1^0 (y - 2y + 2)dy = \int_1^0 (2-y)dy = -\frac{(2-y)^2}{2} \Big|_1^0 = -\left(2 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Для отрезка CA : $x + z = 1$; $y = 0$; $z = 1 - x \Rightarrow dz = -dx$; $y = 0 \Rightarrow dy = 0$.

$$\begin{aligned} \int_{(CA)} (x-2)dx + (x+y)dy - 2zdz &= \int_0^1 (x-2)dx + x \cdot 0 - 2(1-x)(-dx) = \\ &= \int_0^1 (x-2x)dx = -\int_0^1 xdx = -\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $C = \oint_{(ABCA)} = \int_{(AB)} + \int_{(BC)} + \int_{(CA)} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

2-й способ. Вычислим циркуляцию, применив формулу Стокса, причем в качестве поверхности (σ), ограничиваемой ломаной $ABCA$, возьмем поверхность плоскости $\triangle ABC$, уравнение которой $x + y + z - 1 = 0$.

Найдем

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot} \vec{a}} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-2 & x+y & -2z \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(-2z)}{\partial y} - \frac{\partial(x+y)}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial(x-2)}{\partial z} - \frac{\partial(-2z)}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial(x+y)}{\partial x} - \frac{\partial(x-2)}{\partial y} \right) \vec{k} = \\ &= 0\vec{i} + 0\vec{j} + \vec{k}. \end{aligned}$$

Тогда, используя формулу (III.4), получим

$$\begin{aligned} C &= \iint_{(\sigma)} 0dydz + 0dxdz + 1dxdy = \iint_{(\Delta AOB)} dxdy = \\ &= S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Обучающая задача 2. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + x^2\vec{j} - z\vec{k}$ по окружности $(L): x^2 + y^2 = 4, z = 3$ в положительном направлении обхода относительно единичного вектора \vec{k} двумя способами: а) исходя из определения циркуляции; б) используя формулу Стокса.

Решение.

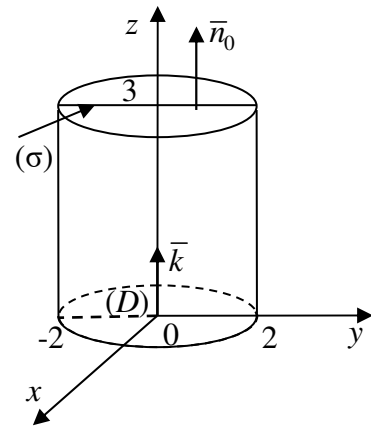
1-й способ. Так как при возрастании параметра t от 0 до 2π движение по окружности происходит против хода часовой стрелки относительно единичного вектора $\vec{k} = (0, 0, 1)$, то параметрические уравнения ориентированной кривой (L) имеют вид $y = 2\sin t, x = 2\cos t, z = 3, t \in [0; 2\pi]$.

Тогда $dx = -2\sin t dt, dy = 2\cos t dt, dz = 0$ и

$$\begin{aligned} C &= \oint_{(L)} ydx + x^2dy - zdz = \int_0^{2\pi} 2\sin t(-2\sin t)dt + 4\cos^2 t \cdot 2\cos t dt - 3 \cdot 0 = \\ &= 8 \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt - 4 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = 8 \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) d(\sin t) - 2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt = \\ &= 8 \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} - 2 \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = -4\pi. \end{aligned}$$

2-й способ. В качестве поверхности (σ) , границей которой является кривая (L) , возьмем круг $x^2 + y^2 \leq 4, z = 3$, тогда $\vec{n}_0 = \vec{k}$. Найдем

$$\overline{\text{rot } \vec{a}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x^2 & -z \end{vmatrix} =$$



$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial(-z)}{\partial y} - \frac{\partial(x^2)}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial(y)}{\partial z} - \frac{\partial(-z)}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y} \right) \bar{k} = \\ & = 0\bar{i} + 0\bar{j} + (2x-1)\bar{k}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} C &= \iint_{(D)} \overline{\text{rot} \vec{a}} \cdot \vec{n}_0 d\sigma = \iint_{(D)} (2x-1) dx dy = \iint_{(D)} (2\rho \cos \varphi - 1) \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2\rho^2 \cos \varphi - \rho) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{2\rho^3}{3} \cos \varphi - \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{16}{3} \cos \varphi - 2 \right) d\varphi = \left(\frac{16}{3} \sin \varphi - 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = -4\pi. \end{aligned}$$

Обучающая задача 3. Вычислить циркуляцию пространственного векторного поля $\vec{a} = -x\bar{i} + x\bar{j} + y\bar{k}$ вдоль эллипса (L) , получающегося пересечением цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ с плоскостью $x + y + z = 1$ (при взгляде с положительного направления оси Oz обход контура (L) совершается против часовой стрелки).

Решение.

1-й способ.

Запишем параметрические уравнения эллипса:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 1 - \cos t - \sin t.$$

При изменении параметра t от 0 до 2π получаем требуемое направление обхода контура (L) . Вычислим циркуляцию, учитывая, что $dx = -\sin t dt$, $dy = \cos t dt$, $dz = (\sin t - \cos t) dt$.

$$\begin{aligned} C &= \oint_{(L)} \vec{a} d\vec{r} = \oint_{(L)} P dx + Q dy + R dz = \oint_{(L)} -x dx + x dy + y dz = \\ &= \int_0^{2\pi} -\cos t (-\sin t) dt + \cos t \cdot \cos t dt + \sin t (\sin t - \cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t \cdot \sin t + \cos^2 t + \sin^2 t - \sin t \cdot \cos t) dt = \int_0^{2\pi} dt = t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi. \end{aligned}$$

2-й способ.

Вычислим циркуляцию, применив формулу Стокса, причем в качестве поверхности (σ) , ограничиваемой кривой (L) , выберем часть плоско-

сти $x + y + z = 1$, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$. Единичную нормаль к плоскости выберем так, чтобы, глядя с ее конца, направление обхода контура (L) проходило против часовой стрелки. Такой единичной нормалью будет вектор $\bar{n}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$. По формуле Стокса имеем

$$C = \oint_{(L)} \bar{a} d\bar{r} = \iint_{(\sigma)} \text{rot } \bar{a} \cdot \bar{n}_0 d\sigma =$$

$$= \iint_{(\sigma)} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) d\sigma.$$

Найдем $\overline{\text{rot} \bar{a}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -x & x & y \end{vmatrix} =$

$$= \left(\frac{\partial(y)}{\partial y} - \frac{\partial(x)}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial(-x)}{\partial z} - \frac{\partial(y)}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-x)}{\partial y} \right) \bar{k} = \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + \bar{k}.$$

Тогда $C = \iint_{(\sigma)} \left(1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right) d\sigma = \iint_{(\sigma)} \frac{2}{\sqrt{3}} d\sigma = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{(\sigma)} d\sigma.$

Вычисление последнего интеграла сведем к вычислению двойного интеграла по области (D_{xy}), являющейся проекцией поверхности σ на плоскость xOy . Этой областью будет круг $x^2 + y^2 \leq 1$. Поскольку

$$d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos \gamma|} = \frac{dxdy}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} dxdy, \text{ то окончательно получаем}$$

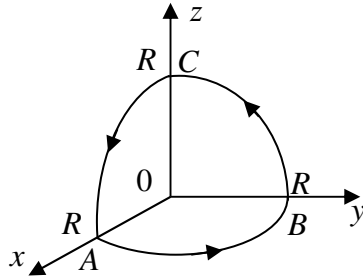
$$C = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{(\sigma)} d\sigma = 2 \iint_{(D_{xy})} dxdy = 2S_{(D_{xy})} = 2 \cdot \pi \cdot 1^2 = 2\pi.$$

Обучающая задача 4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a} = y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k}$ вдоль замкнутого контура, полученного от пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ с координатными плоскостями. Выбрать на (L) такое направление, которое соответствует движению по (L) против часовой стрелки, если наблюдать за ним с конца нормали, проведенной к внешней стороне.

Решение.

1-й способ.

$$\text{Циркуляция } C = \oint_{(L)} \bar{a} d\bar{r} = \int_{(AB)} \bar{a} d\bar{r} + \int_{(BC)} \bar{a} d\bar{r} + \int_{(CA)} \bar{a} d\bar{r}.$$



1) На линии AB : $z = 0$, $dz = 0$, $\bar{a} = y\bar{i} + x\bar{k}$.

Уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ запишем в параметрическом виде: $\begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \sin \varphi \end{cases}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$

$$\bar{a} = R \sin \varphi \bar{i} + R \cos \varphi \bar{k},$$

$$d\bar{r} = dx \cdot \bar{i} + dy \cdot \bar{j} = (-R \sin \varphi \bar{i} + R \cos \varphi \bar{j}) d\varphi.$$

$$\begin{aligned} \int_{(AB)} \bar{a} d\bar{r} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -R^2 \sin^2 \varphi d\varphi = -\frac{R^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \\ &= -\frac{R^2}{2} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{R^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi R^2}{4}. \end{aligned}$$

2) На линии BC : $x = 0$, $dx = 0$, $\bar{a} = y\bar{i} + z\bar{j}$. Уравнение окружности $z^2 + y^2 = R^2$ запишем в параметрическом виде: $\begin{cases} y = R \cos \varphi \\ z = R \sin \varphi \end{cases}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$

$$\bar{a} = R \cos \varphi \bar{i} + R \sin \varphi \bar{j}, d\bar{r} = dy\bar{j} + dz\bar{k} = (-R \sin \varphi \bar{j} + R \cos \varphi \bar{k}) d\varphi.$$

$$\int_{BC} \bar{a} d\bar{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -R^2 \sin^2 \varphi d\varphi = -\frac{\pi R^2}{4}.$$

3) На линии CA : $y = 0$, $dy = 0$, $\bar{a} = z\bar{j} + x\bar{k}$. Уравнение окружности $z^2 + x^2 = R^2$ запишем в параметрическом виде: $\begin{cases} z = R \cos \varphi \\ x = R \sin \varphi \end{cases}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$

$$\bar{a} = z\bar{j} + x\bar{k} = R \cos \varphi \bar{j} + R \sin \varphi \bar{k}, d\bar{r} = dx \cdot \bar{i} + dz \cdot \bar{k} = (R \cos \varphi \bar{i} - R \sin \varphi \bar{k}) d\varphi.$$

$$\int_{(CA)} \bar{a} d\bar{r} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sin^2 \varphi d\varphi = -\frac{\pi R^2}{4}.$$

Следовательно, циркуляция по всей кривой (L) равна

$$C = \oint_{(ABCA)} \bar{a} d\bar{r} = -\frac{\pi R^2}{4} - \frac{\pi R^2}{4} - \frac{\pi R^2}{4} = -\frac{3\pi R^2}{4}.$$

2-й способ.

Вычислим циркуляцию, применив формулу Стокса, причем в качестве поверхности (σ), ограничиваемой кривой (L), возьмем часть сферы, находящейся в первом октанте.

$$\begin{aligned}\text{Найдем } \overline{\text{rot} \vec{a}} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(x)}{\partial y} - \frac{\partial(z)}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial(y)}{\partial z} - \frac{\partial(x)}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial(z)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y} \right) \vec{k} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}.\end{aligned}$$

Тогда, используя формулу (4), получим

$$C = \iint_{(\sigma)} -1 dydz - 1 dx dz - 1 dx dy = - \iint_{(D_{yz})} dydz - \iint_{(D_{xz})} dx dz - \iint_{(D_{xy})} dx dy.$$

Каждый из полученных интегралов выражает площадь четверти круга с центром в начале координат и радиуса R в соответствующих координатных плоскостях. Каждая из площадей равна $\frac{\pi R^2}{4}$.

Следовательно,

$$C = -\frac{\pi R^2}{4} - \frac{\pi R^2}{4} - \frac{\pi R^2}{4} = -\frac{3\pi R^2}{4}.$$

Обучающая задача 5. Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\vec{a} = xy^2z^2\vec{i} + x^2yz^2\vec{j} + xyz\vec{k}$ в точке $M_0(2, -1, 1)$.

Решение.

Наибольшая плотность циркуляции векторного поля \vec{a} в данной точке M_0 достигается в направлении ротора и численно равна $|\overline{\text{rot} \vec{a}}(M_0)|$.

Находим

$$\begin{aligned}\overline{\text{rot} \vec{a}} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2z^2 & x^2yz^2 & xyz \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(xyz)}{\partial y} - \frac{\partial(x^2yz^2)}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial(xy^2z^2)}{\partial z} - \frac{\partial(xyz)}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial(x^2yz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2z^2)}{\partial y} \right) \vec{k} =\end{aligned}$$

$$= (xz - 2x^2yz)\bar{i} + (2xy^2z - yz)\bar{j} + (2xyz^2 - 2xyz^2)\bar{k} =$$

$$= (xz - 2x^2yz)\bar{i} + (2xy^2z - yz)\bar{j} + 0 \cdot \bar{k},$$

$$\overline{\text{rot} \vec{a}}(M_0) = 10\bar{i} + 5\bar{j}, \quad |\overline{\text{rot} \vec{a}}(M_0)| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}.$$

3. Студент у доски выполняет задание.

Пример. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = (z + 2x - 3y)\bar{i} + (x + y - 2z)\bar{j} + y\bar{k}$ вдоль контура треугольника ABC , где $A(2;0;0), B(0;3;0), C(0;0;1)$, двумя способами: а) используя определение циркуляции; б) с помощью формулы Стокса.

Ответ: $\frac{35}{2}$.

4. Два студента у доски выполняют задания.

Пример 1. Найти циркуляцию (по формуле Стокса) векторного поля $\vec{a} = (z^2 - x^2)\bar{i} + (x^2 - y^2)\bar{j} + (y^2 - z^2)\bar{k}$ по контуру (L) : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2. \end{cases}$

Ответ: 0.

Пример 2. Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\vec{a} = (x + y)\bar{i} + yz\bar{j} + xz\bar{k}$ в точке $M_0(2;1;0)$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

5. Выполнить самостоятельно свой вариант задания (один вариант на двоих).

Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля \vec{a} в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

1) $\vec{a} = x^2\bar{i} - xy^2\bar{j} + z^2\bar{k}, M_0(0,1,-2).$ Ответ: 1.

2) $\vec{a} = xy^2\bar{i} + yz^2\bar{j} - x^2\bar{k}, M_0(1,-2,0).$ Ответ: $2\sqrt{5}$.

3) $\vec{a} = xz\bar{i} + z\bar{j} + yz\bar{k}, M_0(3,0,1).$ Ответ: 3.

4) $\vec{a} = xy\bar{i} + xyz\bar{j} - x\bar{k}, M_0(-1,0,3).$ Ответ: $\sqrt{2}$.

5) $\vec{a} = yz\bar{i} - z^2\bar{j} + xyz\bar{k}, M_0(2,1,-1).$ Ответ: $\sqrt{21}$.

- 6) $\bar{a} = xz\bar{i} - xyz\bar{j} + zx^2\bar{k}$, $M_0(0,1,1)$. Ответ: 1.
- 7) $\bar{a} = xy\bar{i} - zy^2\bar{j} - xz\bar{k}$, $M_0(0,-2,1)$. Ответ: $\sqrt{17}$.
- 8) $\bar{a} = xz\bar{i} - y\bar{j} - zy\bar{k}$, $M_0(0,1,2)$. Ответ: 2.
- 9) $\bar{a} = y^2\bar{i} - xy^2\bar{j} + z^2\bar{k}$, $M_0(-1,2,1)$. Ответ: 8.
- 10) $\bar{a} = xy\bar{i} - (y+z)\bar{j} + xz\bar{k}$, $M_0(4,0,1)$. Ответ: $3\sqrt{2}$.
- 11) $\bar{a} = x\bar{i} - zy\bar{j} + zx^2\bar{k}$, $M_0(-3,0,2)$. Ответ: 12.
- 12) $\bar{a} = (x+y^2)\bar{i} + yz\bar{j} - x^2\bar{k}$, $M_0(1,0,4)$. Ответ: 2.
- 13) $\bar{a} = xz\bar{i} - y\bar{j} + yz\bar{k}$, $M_0(0,-1,4)$. Ответ: 4.
- 14) $\bar{a} = xz\bar{i} + z\bar{j} + yz\bar{k}$, $M_0(3,0,1)$. Ответ: 3.
- 15) $\bar{a} = yz\bar{i} - z^2\bar{j} + xyz\bar{k}$, $M_0(2,1,-1)$. Ответ: $\sqrt{21}$.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Изучить по теоретической части модуля материал к следующему практическому занятию по теме «Операторы Гамильтона и Лапласа. Потенциальное, соленоидальное и гармоническое векторные поля».

2. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a} = 3x\bar{i} + (y+z)\bar{j} + (x-z)\bar{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $P: x + 3y + z - 3 = 0$ с координатными плоскостями двумя способами:

а) используя определение циркуляции; б) с помощью формулы Стокса.

Ответ: -6.

3. Найти циркуляцию векторного поля

$$\bar{a} = (z^2 - x^2)\bar{i} + (x^2 - y^2)\bar{j} + (y^2 - z^2)\bar{k} \text{ по контуру } (L): \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2. \end{cases}$$

Ответ: 0.

4. Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\bar{a} = xy\bar{i} + (x-z)\bar{j} + (y-x)\bar{k}$, $M_0(0,0,1)$.

Ответ: $\sqrt{6}$.

5. Выполнить свой вариант индивидуального домашнего задания (один вариант на двоих).

ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

(выполнить один вариант на двоих)

Найти циркуляцию векторного поля \vec{a} по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n}(A, B, C)$ этой плоскости двумя способами: 1) используя определение циркуляции; 2) с помощью формулы Стокса.

Вариант 1.

$$1) \vec{a} = (x+z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x+2y+z)\vec{k}, (P): x+y+z-2=0. \quad \text{Ответ: } 0.$$

$$2) \vec{a} = -y\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, (L): \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 1. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \pi.$$

Вариант 2.

$$1) \vec{a} = (y+2z)\vec{i} + (x+2z)\vec{j} + (x-2y)\vec{k}, (P): 2x+y+2z-2=0.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{7}{2}.$$

$$2) \vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + (x+y)\vec{k}, (L): \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 1. \end{cases} \quad \text{Ответ: } -2\pi.$$

Вариант 3.

$$1) \vec{a} = (x+z)\vec{i} + 2y\vec{j} + (x+y-z)\vec{k}, (P): x+2y+z-2=0. \quad \text{Ответ: } 1.$$

$$2) \vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}, (L): \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2. \end{cases} \quad \text{Ответ: } -4\pi.$$

Вариант 4.

$$1) \vec{a} = (x+y-z)\vec{i} - 2y\vec{j} + (x+2z)\vec{k}, (P): x+2y+z-2=0. \quad \text{Ответ: } -5.$$

$$2) \vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}, (L): \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 0. \end{cases} \quad \text{Ответ: } 4\pi.$$

Вариант 5.

$$1) \vec{a} = (y-z)\vec{i} + (2x+y)\vec{j} + z\vec{k}, (P): 2x+y+z-2=0. \quad \text{Ответ: } 0.$$

$$2) \vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}, (L): \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases} \quad \text{Ответ: } -4\pi.$$

Вариант 6.

1) $\bar{a} = 4x\bar{i} + (x - y - z)\bar{j} + (3y + 2z)\bar{k}$, (P): $2x + y + z - 4 = 0$. Ответ: 36.

2) $\bar{a} = yz\bar{i} - \bar{j} + x\bar{k}$, (L): $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = 1. \end{cases}$ Ответ: -3π .

Вариант 7.

1) $\bar{a} = (2z - x)\bar{i} + (x + 2y)\bar{j} + 3z\bar{k}$, (P): $x + 4y + 2z - 8 = 0$. Ответ: 40.

2) $\bar{a} = (x - y)\bar{i} + x\bar{j} + z^2\bar{k}$, (L): $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4z^2 = 0, \\ z = \frac{1}{2}. \end{cases}$ Ответ: 2π .

Вариант 8.

1) $\bar{a} = (x + y + z)\bar{i} + 2z\bar{j} + (y - 7z)\bar{k}$, (P): $2x + 3y + z - 6 = 0$. Ответ: 0.

2) $\bar{a} = 2y\bar{i} + \bar{j} - 2yz\bar{k}$, (L): $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 2. \end{cases}$ Ответ: -8π .

Вариант 9.

1) $\bar{a} = z\bar{i} + (x + y)\bar{j} + y\bar{k}$, (P): $2x + y + 2z - 2 = 0$. Ответ: $\frac{5}{2}$.

2) $\bar{a} = 2y\bar{i} + 5z\bar{j} + 3x\bar{k}$, (L): $\begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 1. \end{cases}$ Ответ: -2π .

Вариант 10.

1) $\bar{a} = (x + z)\bar{i} + z\bar{j} + (2x - y)\bar{k}$, (P): $3x + 2y + z - 6 = 0$. Ответ: -24 .

2) $\bar{a} = yz\bar{i} + 2xz\bar{j} + y^2\bar{k}$, (L): $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 16, z > 0 \end{cases}$ Ответ: 48π .

Вариант 11.

1) $\bar{a} = (y + z)\bar{i} + x\bar{j} + (y - 2z)\bar{k}$, (P): $2x + 2y + z - 2 = 0$. Ответ: 2.

2) $\bar{a} = y\bar{i} - x\bar{j} + z^2\bar{k}$, (L): $\begin{cases} z = 3 \cdot (x^2 + y^2) + 1, \\ z = 4. \end{cases}$ Ответ: -2π .

Вариант 12.

1) $\bar{a} = (2y - z)\bar{i} + (x + 2y)\bar{j} + y\bar{k}$, (P): $x + 3y + 2z - 6 = 0$. Ответ: -12 .

2) $\bar{a} = (x - y)\bar{i} + x\bar{j} - z\bar{k}$, (L): $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 5. \end{cases}$ Ответ: 2π .

Вариант 13.

$$1) \bar{a} = (y+z)\bar{i} + (x+6y)\bar{j} + y\bar{k}, (P): x+2y+2z-2=0. \quad \text{Ответ: } \frac{3}{2}.$$

$$2) \bar{a} = yz\bar{i} + 2xz\bar{j} + xy\bar{k}, (L): \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases} \quad \text{Ответ: } 36\pi.$$

Вариант 14.

$$1) \bar{a} = (x+z)\bar{i} + z\bar{j} + (2x-y)\bar{k}, (P): 2x+2y+z-4=0. \quad \text{Ответ: } -12.$$

$$2) \bar{a} = (x^2-y)\bar{i} + x\bar{j} + \bar{k}, (L): \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases} \quad \text{Ответ: } 2\pi.$$

Вариант 15.

$$1) \bar{a} = (x+y+z)\bar{i} + 2z\bar{j} + (y-7z)\bar{k}, (P): 2x+3y+z-6=0. \quad \text{Ответ: } 0.$$

$$2) \bar{a} = xz\bar{i} - \bar{j} + 9\bar{k}, (L): \begin{cases} z = 5(x^2 + y^2) - 1, \\ z = 0. \end{cases} \quad \text{Ответ: } 0.$$

IV. Операторы Гамильтона и Лапласа.

Потенциальное и соленоидальное векторные поля

1. Просмотр выполнения домашнего задания.
2. Краткий теоретический обзор с использованием лекционного материала.

Введенные основные понятия векторного анализа: градиент, дивергенция, ротор – удобно представлять с помощью символического вектора $\bar{\nabla}$ («набла-вектор», или линейный оператор Гамильтона):

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}.$$

Его применение к скалярным и векторным функциям формально соответствует некоммутативной операции умножения на вектор с координатами $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$. Например, для скалярного поля, которое описывается скалярной функцией $U = U(x, y, z)$, получим

$$\bar{\nabla} U = \text{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}. \quad (\text{IV.1})$$

Для векторного поля $\bar{a} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$ скалярное произведение порождает дивергенцию:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{a} = \text{div } \bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad (\text{IV.2})$$

а векторное произведение дает ротор:

$$\bar{\nabla} \times \bar{a} = \text{rot } \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (\text{IV.3})$$

Пусть имеется скалярное поле $U = U(x, y, z)$. Его градиент будет

$$\overline{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}. \quad (\text{IV.4})$$

Поле градиента является векторным полем, и можно найти его дивергенцию и ротор: $\text{div } \overline{\text{grad}} U$ и $\text{rot grad } U$.

Образуя дивергенцию $\overline{\text{grad}} U$ (формула (IV.4)), получим равенство

$$\text{div } \overline{\text{grad}} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (\text{IV.5})$$

Правая часть его называется оператором Лапласа функции U , обозначается ΔU и вычисляется по формуле

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (\text{IV.6})$$

Выражение $\text{div } \overline{\text{grad}} U$ можно с помощью набла-вектора записать еще и так:

$$\text{div } \overline{\text{grad}} U = \bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} U) = \bar{\nabla}^2 U. \quad (\text{IV.7})$$

Это обозначение оператора Лапласа также часто встречается.

Определение IV.1. Векторное поле, во всех точках которого дивергенция равна нулю, называется соленоидальным или трубчатым. Название «трубчатый» обусловлено тем, что в соленоидальном поле векторные линии нигде не начинаются и не кончаются, они могут уходить

в бесконечность, быть замкнутыми или иметь начало и конец у границ поля. Примерами таких полей являются напряженность магнитного поля, создаваемого электрическим током, текущим по бесконечно длинному прямолинейному проводу; поле линейных скоростей жидкости, вращающейся вокруг какой-нибудь оси, и другие. Векторные линии таких полей – замкнутые кривые (окружности).

Поток такого поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Определение IV.2. Векторное поле, во всех точках которого вихревой вектор (ротор) равен нулю, называется потенциальным (или безвихревым).

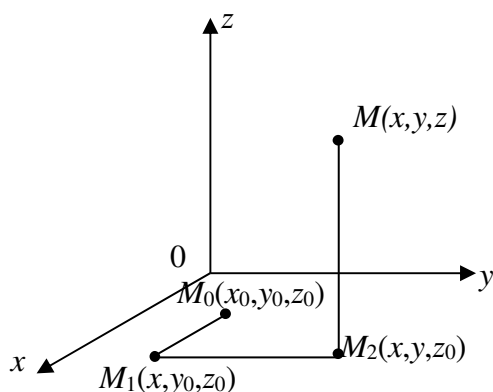
Если векторное поле потенциально, т.е. во всех точках поля $\overline{\text{rot}} \vec{a} = 0$, то оно является градиентом некоторого скалярного поля $U(M)$. Функцию $U(M)$ называют потенциалом поля.

В потенциальном поле линейный интеграл (работа) не зависит от формы линии, соединяющей какие-либо две его точки, а циркуляция всегда равна нулю.

Для нахождения потенциала, фиксируя точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$. Тогда

$$U(x, y, z) = U(M) = \int_{M_0 M} Pdx + Qdy + Rdz. \quad (\text{IV.8})$$

Линию интегрирования (в силу независимости такого интеграла от формы пути) выберем в виде ломаной $M_0M_1M_2M$, где отрезок M_0M_1 параллелен оси Ox , отрезок M_1M_2 параллелен оси Oy , а отрезок M_2M параллелен оси Oz .



Получим формулу

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z) &= \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz = \\
 &= \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz. \quad (\text{IV.9})
 \end{aligned}$$

Определение IV.3. Векторное поле, являющееся одновременно и соленоидальным и потенциальным, называется гармоническим.

Обучающая задача 1.

Показать, что векторное поле $\vec{a} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ является гармоническим. Найти его потенциал.

Решение.

Покажем, что $\overline{\text{rot}} \vec{a} = 0$ и $\text{div} \vec{a} = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned}
 \overline{\text{rot}} \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(x+y)}{\partial y} - \frac{\partial(x+z)}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial(y+z)}{\partial z} - \frac{\partial(x+y)}{\partial x} \right) \vec{j} + \\
 &+ \left(\frac{\partial(x+z)}{\partial x} - \frac{\partial(y+z)}{\partial y} \right) \vec{k} = (1-1)\vec{i} + (1-1)\vec{j} + (1-1)\vec{k} = \vec{0}.
 \end{aligned}$$

$$\text{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial(y+z)}{\partial x} + \frac{\partial(x+z)}{\partial y} + \frac{\partial(x+y)}{\partial z} = 0.$$

Следовательно, поле является гармоническим. Найдем его потенциал

$$\begin{aligned}
 U(M) &= \int_{x_0}^x (y_0 + z_0) dx + \int_{y_0}^y (x + z_0) dy + \int_{z_0}^z (x + y) dz = \\
 &= (y_0 + z_0) x \Big|_{x_0}^x + (xy + z_0 y) \Big|_{y_0}^y + (xz + yz) \Big|_{z_0}^z = \\
 &= (y_0 + z_0)(x - x_0) + xy + z_0 y - xy_0 - z_0 y_0 + xz + yz - xz_0 - yz_0 = \\
 &= \cancel{xy_0} - x_0 y_0 + \cancel{xz_0} - x_0 z_0 + xy + \cancel{z_0 y} - \cancel{xy_0} - z_0 y_0 + xz + yz - \cancel{xz_0} - \cancel{yz_0} = \\
 &= xy + xz + yz - x_0 y_0 - x_0 z_0 - z_0 y_0 = xy + xz + yz + C_1, \text{ где} \\
 &C_1 = -x_0 y_0 - x_0 z_0 - z_0 y_0.
 \end{aligned}$$

Замечание 1.

В качестве точки M_0 удобно взять точку $O(0,0,0)$. Тогда

$$U(M) = \int_0^x (0+0) dx + \int_0^y (x+0) dy + \int_0^z (x+y) dz = 0 + xy + xz + yz.$$

Итак, $U(M) = xy + xz + yz$ является потенциалом поля \bar{a} . Действительно, $\overline{\text{grad}U} = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k} = (y+z)\bar{i} + (x+z)\bar{j} + (x+y)\bar{k} = \bar{a}$.

Замечание 2.

Если поле является гармоническим, то $\text{div} \overline{\text{grad}U} = 0$, а потенциал поля U является гармонической функцией, т.е. удовлетворяет уравнению

Лапласа $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$.

Проверим, что U удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y+z, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x+z, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = x+y;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Следовательно, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$.

3. Студент у доски выполняет задание.

Показать, что векторное поле $\bar{a} = (2x + yz)\bar{i} + xz\bar{j} + (yx + 2z)\bar{k}$ потенциально и найти его потенциал.

Ответ: $x^2 + xyz + z^2 + C$.

4. Студент у доски выполняет задания:

а) является ли векторное поле $\bar{a} = (2x + yz)\bar{i} + 3xz\bar{j} + (yx - 2z)\bar{k}$ соленоидальным?

Ответ: да, является.

б) выясните, являются ли гармоническими следующие функции:

1) $U(M) = 3x - 7y + 5z$; 2) $U(M) = 3x^2 + 5z$; 3) $U(M) = 3x^2 - 5zy + 3y^2$.

Ответ: 1) да; 2) нет; 3) да.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Раскройте символические записи: а) $\nabla \nabla \bar{a}$; б) $\nabla \nabla U$; в) $\nabla \times (\nabla \times \bar{a})$.

Ответ: а) $\overline{\text{grad div } \bar{a}}$; б) ΔU ; в) $\overline{\text{rot}(\text{rot } \bar{a})}$.

2. Определите, является ли векторное поле потенциальным? В случае потенциальности, найти его потенциал:

1) $\bar{a}(M) = (x^2 y + y^3) \bar{i} + (x^3 - xy^2) \bar{j}$;

2) $\bar{a} = xy^2 \bar{i} + x^2 y \bar{j} - (x^2 + y^2) \bar{k}$; 3) $\bar{a} = 2xy^4 \bar{i} + (4x^2 y^3 + 3) \bar{j}$.

Ответ: 1) не потенциально; 2) не потенциально; 3) $U = x^2 y^4 + 3y + C$.

3. Среди данных векторных полей выделите соленоидальные:

1) $\bar{a}(M) = 3z(x^2 + y^2) \bar{i} - 7y(x^2 + z^2) \bar{j} + 5x(z^2 + y^2) \bar{k}$;

2) $\bar{a} = x^2 y \bar{i} - 2xy^2 \bar{j} + 2xyz \bar{k}$;

3) $\bar{a} = x^3 y^2 \bar{i} - (x^2 y^3 + 3) \bar{j}$.

Ответ: 2); 3).

УЧЕБНЫЙ МОДУЛЬ 13

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ВВЕДЕНИЕ

К дифференциальным уравнениям с частными производными (уравнениям математической физики) приводит рассмотрение многих явлений в естествознании и технике. Вообще, теория дифференциальных уравнений с частными производными оказалась тесно связанной с задачами и понятиями геометрии (теории поверхностей и пространственных кривых).

Понятие дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка возникли, прежде всего, в ходе решения физических задач. Среди которых выделим задачу о колебании струны, приводящей к волновому уравнению. Около 1760 г. Л. Эйлер, разрабатывая проблемы гидродинамики, вывел уравнение объемного расширения жидкости. Решение задачи о колебании газа в трубах различных профилей, о колебании мембраны, теории потенциала и другие также приводили к уравнениям с частными производными второго порядка.

Отметим, что студенты технических специальностей используют основные уравнения математической физики, в частности, в курсе строительной механики, где формулируется и решается методом Фурье краевая задача о колебании балки, которая приводит к уравнению с частными производными четвертого порядка.

ДИДАКТИЧЕСКИЕ ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ

<i>Студент должен знать</i>	<i>Студент должен уметь</i>
<ul style="list-style-type: none">– классификацию основных уравнений математической физики;– формулировку краевых задач для волнового уравнения;– формулировку краевой задачи для уравнения теплопроводности;– формулировку краевой задачи для уравнения Лапласа	<ul style="list-style-type: none">– решать простейшие уравнения математической физики;– решать волновое уравнение для бесконечной струны по формуле Даламбера;– решать волновое уравнение методом Фурье;– решать уравнение теплопроводности методом Фурье

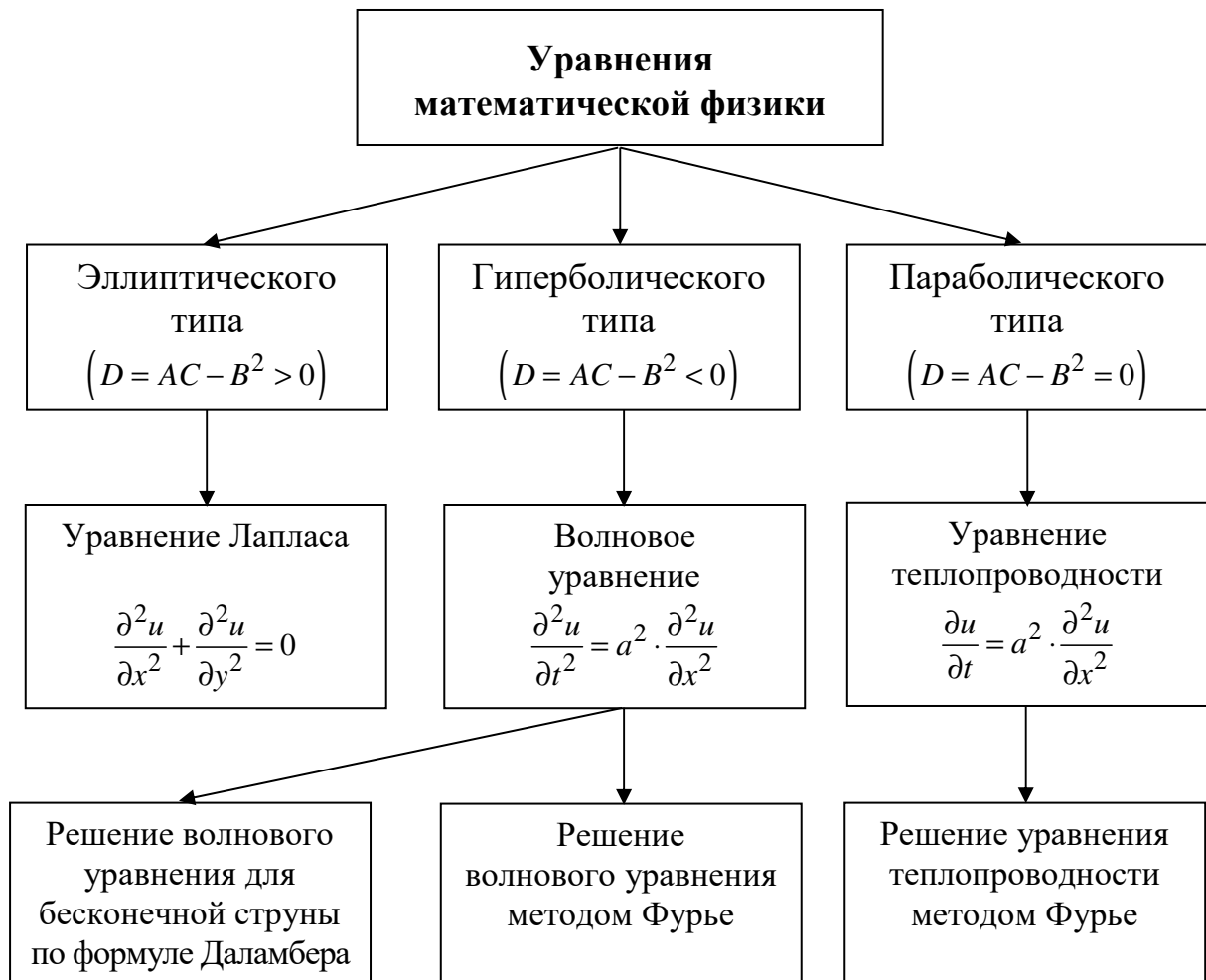
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА МОДУЛЯ

Название вопросов, которые изучаются на лекции	Номер практи- ческого занятия	Наглядные и методи- ческие пособия	Формы контроля знаний
1. Решение простейших уравнений с частными производными. Классификация уравнений математической физики. Формула Даламбера решения задачи Коши для волнового уравнения	1	2, 4	ПДЗ
2. Решение волнового уравнения и уравнения теплопроводности методом Фурье	2	2,3,4	ПДЗ

Принятые сокращения:

ПДЗ – проверка домашнего задания.

ГРАФИЧЕСКАЯ СХЕМА МОДУЛЯ



ИНФОРМАЦИОННАЯ ТАБЛИЦА

«ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

1. Уравнения математической физики – это дифференциальные уравнения с частными производными, т.е. уравнения, содержащие в себе несколько независимых переменных, неизвестную функцию от этих переменных и частные производные различных порядков от неизвестной функции.

2. Основными уравнениями математической физики называют уравнения второго порядка от функции двух независимых переменных вида

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f(x, y).$$

3. Принята следующая **классификация** таких уравнений

Пусть $D = AC - B^2$. Тогда

- 1) если $D > 0$, то это уравнение эллиптического типа;
- 2) если $D < 0$, то это уравнение гиперболического типа;
- 3) если $D = 0$, то это уравнение параболического типа.

4. Наиболее часто встречающиеся уравнения:

- 1) **Волновое уравнение** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ гиперболического типа;
- 2) **Уравнение теплопроводности** $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ параболического типа;
- 3) **Уравнение Лапласа** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ эллиптического типа.

Формулировка и решение краевых задач:

1) Краевая задача для бесконечной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Начальные условия:

$u(x, 0) = f(x)$ – определяет положение струны в начальный момент времени;

$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x)$ – определяет скорость движения каждой точки струны при $t = 0$ (граничные условия отсутствуют).

Частное решение находится по формуле

$$u(x,t) = \frac{f(x+at) - f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(z) dz.$$

2) Краевая задача для волнового уравнения на отрезке $[0, \ell]$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x)$ – начальные условия;
 $u(0,t) = 0$
 $u(\ell,t) = 0$ – граничные условия (концы струны закреплены).

Начальные и граничные условия называются краевыми условиями, а задача нахождения частного решения уравнения, удовлетворяющего краевым условиям, называется задачей Коши, или краевой задачей.

В данном случае решение находится по формуле

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \left(C_n \cos \frac{an\pi}{\ell} t + D_n \sin \frac{an\pi}{\ell} t \right),$$

где $C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx$, $D_n = \frac{2}{an\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx$.

Это метод Фурье решения краевой задачи.

Если концы струны не закреплены, то граничные условия имеют вид

$$u(0,t) = \psi_1(t),$$

$$u(\ell,t) = \psi_2(t).$$

3) Краевая задача для уравнения теплопроводности

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u(x,t)$ – температура.

$u(x,0) = f(x)$ – начальное условие (задает температуру стержня в начальный момент времени);

$$u(0,t) = \psi_1(t),$$

$u(\ell,t) = \psi_2(t)$ – граничные условия (задают температуру на концах стержня в любой момент времени).

Если граничные условия имеют вид
$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(\ell, t) &= 0, \end{aligned}$$
 то, применяя метод Фурье, получаем решение

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi}{\ell} x,$$

где
$$C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx.$$

4) Краевая задача для уравнения Лапласа.

Задача Дирихле:

Пусть G – некоторая область на плоскости Oxy , Γ – ее граница, $\varphi(x, y)$ – некоторая функция, заданная на границе Γ .

Требуется найти частное решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее условию $u(x, y) \Big|_{\Gamma} = \varphi(x, y).$

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

13.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В данном разделе рассматриваются дифференциальные уравнения с частными производными (или, как их еще называют, уравнения математической физики, так как к ним чаще всего приводит решение задач физики).

Определение 13.1.1. Дифференциальным уравнением с частными производными называется уравнение, связывающее независимые переменные x_1, x_2, \dots, x_n , неизвестную функцию $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и частные производные различного порядка по независимым переменным, т.е.

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u(x_1, x_2, \dots, x_n), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \cdot \partial x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot \partial x_n^{k_n}}\right) = 0,$$

где $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$, F – заданная функция.

Порядком дифференциального уравнения с частными производными называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение. Решением дифференциального уравнения с частными производными называется функция, имеющая соответствующие частные производные и обращающая это уравнение в тождество. Проинтегрировать дифференциальное уравнение с частными производными – значит найти все его решения.

Уравнение, содержащее неизвестную функцию и частные производные от нее в первых степенях, называется линейным.

Основными уравнениями математической физики называют (для случая двух независимых переменных) дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка следующего вида:

$$A \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f(x, y), \quad (13.1.1)$$

где A, B, C, D, E, F – постоянные действительные коэффициенты.

Общепринята следующая классификация таких уравнений.

Пусть $D = AC - B^2$ – число, которое называется дискриминантом уравнения (13.1.1).

Тогда:

1) если $D > 0$, то уравнение (13.1.1) называется уравнением эллиптического типа;

2) если $D < 0$, то уравнение (13.1.1) называется уравнением гиперболического типа;

3) если $D = 0$, то уравнение (13.1.1) называется уравнением параболического типа.

Приведем примеры основных уравнений математической физики и определим их тип.

I. Волновое уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($u = u(x, t)$, a – действительный параметр), $D = 1 \cdot (-a^2) - 0^2 = -a^2 < 0$ ($A = 1$, $C = -a^2$, $B = 0$) – это уравнение гиперболического типа.

Отметим, что к исследованию этого уравнения приводит рассмотрение процессов поперечных колебаний струны, продольных колебаний стержня, электрических колебаний в проводе, крутильных колебаний вала, колебаний газа и др.

II. Уравнение теплопроводности (Фурье): $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Это уравнение параболического типа, т.к. $A = 0$, $C = -a^2$, $B = 0$, $D = 0$. К исследованию этого уравнения приводят рассмотрение процессов распространения тепла, фильтрации жидкости и газа в пористой среде, некоторые задачи теории вероятностей.

III. Уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

$A = C = 1$, $B = 0$, $D = 1 > 0$ – это уравнение эллиптического типа. К исследованию этого уравнения приводит рассмотрение задач об электрических и магнитных полях, о стационарном тепловом состоянии, некоторых задач гидродинамики.

13.2. ФОРМУЛИРОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

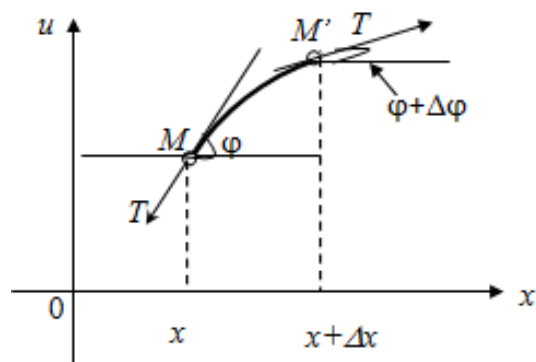
13.2.1. Вывод уравнения свободных малых колебаний струны

Выведем уравнение колебаний струны. В математической физике под струной понимают гибкую, упругую нить. Гибкость струны означает, что напряжение в ней может быть направлено только вдоль струны. Упругость струны означает, что процесс ее деформации обратим, т.е. что при

нем не происходит потери энергии. Струна будет считаться тонкой, т.е. ее поперечные размеры принимаются пренебрежимо малыми по сравнению с ее длиной.

Пусть длина струны равна ℓ , а в состоянии равновесия струна расположена вдоль оси Ox между точками $x=0$ и $x=\ell$. Если вывести струну из состояния равновесия, подвергнув ее действию какой-нибудь силы, то струна начнет колебаться. Будем считать, что движение всей струны происходит в одной плоскости и что каждая ее точка движется перпендикулярно оси Ox . Смещение точки струны с координатой x в момент времени t будем обозначать через $u(x, t)$ или просто через u . Предположим, что все деформации струны малы. Под этим будем понимать, что малы как смещения u каждого из элементов струны, так и их повороты u'_x .

Рассмотрим элемент струны, который в положении равновесия имеет конечные точки x и $x + \Delta x$.



Пусть в результате отклонения струны в некоторый момент времени этот элемент приходит в положение MM' . Очевидно, длина элемента MM' равна $\int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + u'^2_x} dx$, что в предположении малости угла поворота элемента (и тем самым тангенса этого угла) приближенно равна Δx .

Рассмотрим воздействие на элемент MM' равнодействующей вертикальных составляющих сил натяжения T , действующих на его концы. Эти силы действуют в направлении касательных к струне. Обозначим углы, образуемые этими касательными с осью Ox , через φ и $\varphi + \Delta\varphi$. Тогда вертикальная составляющая равнодействующей этих двух сил натяжения будет равна

$$T \sin(\varphi + \Delta\varphi) + T \sin(\varphi + \pi) = T \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T \sin \varphi.$$

Ввиду малости углов φ и $\varphi + \Delta\varphi$ можно синусы заменить тангенсами $T(\operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) - \operatorname{tg} \varphi)$.

Но тангенсы углов наклона касательных равны производным, т.е.

$$T \operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) - T \operatorname{tg} \varphi = T \left(\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= (\text{применим теорему Лагранжа: } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)) = \\
&= T \frac{\partial^2 u(x + \Theta \Delta x, t)}{\partial x^2} (x + \Delta x - x) \cong T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Delta x, \text{ где } 0 < \Theta < 1.
\end{aligned}$$

Чтобы получить уравнение движения, нужно внешние силы, приложенные к элементу, приравнять силе инерции (принцип Даламбера). Пусть ρ – линейная плотность струны. Тогда масса элемента струны будет $\rho \Delta x$.

Ускорение элемента $a = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$. Следовательно, $T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Сокращая на Δx и обозначая $a^2 = \frac{T}{\rho} > 0$, получаем уравнение колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (13.2.1)$$

т.е. волновое уравнение.

13.2.2. Начальные и граничные условия

Уравнению (13.2.1) удовлетворяет всякое свободное колебание струны независимо от своего происхождения, а также от способов закрепления концов струны в точках $x = 0$ и $x = \ell$.

Вместе с тем совершенно ясно, что если вывести струну из положения равновесия и предоставить самой себе, то характер ее колебания будет один, а если, выведя из состояния равновесия, придать ее точкам те или иные скорости, – то другой. Кроме того, неподвижное и подвижное закрепления концов струны приводят, как можно достаточно наглядно себе представить, к весьма различным ее движениям.

Из сказанного следует, что для определения закона движения струны, кроме уравнения (13.2.1), необходимо еще задать начальные условия, описывающие поведение струны в начальный момент времени $t = 0$, т.е. ту форму, которую струна приобретает при выводе ее из положения равновесия,

$$u(x, 0) = f(x), \quad (13.2.2)$$

и те скорости, которые сообщаются точкам струны при ее «отпускании»

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x). \quad (13.2.3)$$

Кроме того, необходимо задать граничные условия задачи, т.е. описать характер поведения концов струны в процессе ее колебаний. Простейший случай граничных условий, когда концы струны закреплены неподвижно

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (13.2.4)$$

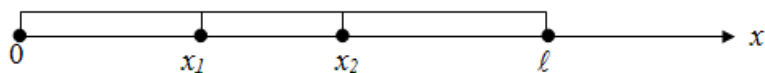
Разумеется, может оказаться, что в начальный момент времени струна не имеет отклонения от равновесного состояния ($f(x) \equiv 0$) или же неподвижна ($\varphi(x) \equiv 0$).

Граничные условия задачи вместе с начальными ее условиями называются краевыми условиями, а задача нахождения частного решения уравнения (13.2.1), удовлетворяющего краевым условиям, называется задачей Коши, или краевой задачей. Если концы струны не закреплены, то граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \psi_1(t), \\ u(l, t) &= \psi_2(t). \end{aligned} \quad (13.2.5)$$

13.2.3. Формулировка краевой задачи для уравнения теплопроводности

Рассмотрим однородный стержень длины ℓ . Будем предполагать, что боковая поверхность стержня теплонепроницаема и что во всех точках поперечного стержня температура одинакова. Изучим процесс распространения тепла в стержне.



Расположим ось Ox так, что один конец стержня будет совпадать с точкой $x=0$, а другой – с $x=\ell$. Пусть $u(x, t)$ – температура в сечении стержня с абсциссой x в момент времени t . Уравнение распространения тепла в однородном стержне будет иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (13.2.6)$$

оно называется уравнением теплопроводности.

Чтобы решение уравнения (13.2.6) было вполне определено, функция $u(x, t)$ должна удовлетворять краевым условиям, соответствующим физическим условиям задачи. Условия, которые соответствуют, так называемой, первой краевой задаче для $0 \leq t \leq T$, имеют следующий вид:

$$\text{начальное условие} \quad u(x, 0) = \varphi(x) \quad (13.2.7)$$

$$\text{граничные условия} \quad \begin{cases} u(0, t) = \psi_1(t), \\ u(\ell, t) = \psi_2(t). \end{cases} \quad (13.2.8)$$

Физически условие (13.2.7) означает то, что при $t = 0$ в различных сечениях стержня задана температура $\varphi(x)$. Граничные условия (13.2.8) говорят о том, что на концах стержня при $x = 0$ и при $x = \ell$ поддерживается температура, равная $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ соответственно. Может быть, что $\psi_1(t) = \psi_2(t) = 0$.

Условия (13.2.7) и (13.2.8) называют краевыми условиями, а задача нахождения частного решения уравнения (13.2.6), удовлетворяющего краевым условиям, называется задачей Коши или краевой задачей для уравнения теплопроводности.

13.2.4. Формулировка краевой задачи для уравнения Лапласа

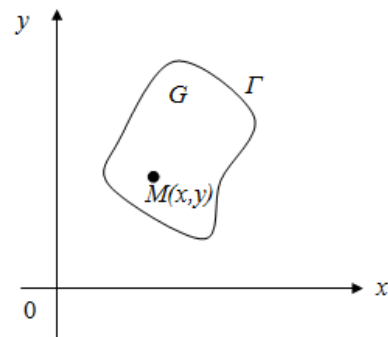
Сформулируем краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (13.2.9)$$

Пусть G – некоторая область на плоскости Oxy , Γ – ее граница и некоторая функция $\varphi(x, y)$ задана во всех точках границы Γ .

Задача Дирихле состоит в том, что требуется найти частное решение $u(x, y)$ уравнения (13.2.9), которое удовлетворяло бы следующему условию:

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y). \quad (13.2.10)$$



13.3. РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ПРЯМОЙ ПО ФОРМУЛЕ ДАЛАМБЕРА

Рассмотрим случай бесконечной струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x \in (-\infty, \infty), t \geq 0). \quad (13.3.1)$$

Задача Коши (краевая задача) формулируется без граничных условий

$$u(x, 0) = f(x), \quad (13.3.2)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi(x). \quad (13.3.3)$$

Предполагается, что функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, а $\varphi(x)$ один раз непрерывно дифференцируема на всей числовой оси.

Тогда задача (13.3.1 – 13.3.3) имеет единственное решение, которое определяется формулой

$$u(x, t) = \frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(z) dz, \quad (13.3.4)$$

называемой формулой Даламбера.

Пример. Решить краевую задачу (13.3.1 – 13.3.3), если $f(x) = \sin x$, $\varphi(x) = \cos x$.

Решение. По формуле Даламбера

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\sin(x+at) + \sin(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \cos z dz = \\ &= \frac{\sin(x+at) + \sin(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \sin z \Big|_{x-at}^{x+at} = \\ &= \frac{\sin(x+at) + \sin(x-at)}{2} + \frac{\sin(x+at) - \sin(x-at)}{2a}. \end{aligned}$$

Пусть $a = 1$, тогда

$$u(x, t) = \frac{\sin(x+t) + \sin(x-t)}{2} + \frac{\sin(x+t) - \sin(x-t)}{2} = \sin(x+t),$$

то есть функция $u(x, t) = \sin(x + t)$ является решением краевой задачи для бесконечной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = \sin x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \cos x.$$

13.4. МЕТОД ФУРЬЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

13.4.1. Метод разделения переменных

Рассмотрим метод решения уравнения колебаний струны методом разделения переменных, который также называют методом Фурье. Существенным для него является использование рядов Фурье.

Пусть дано уравнение колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (13.4.1),$$

причем концы струны закреплены неподвижно

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (13.4.2)$$

а начальными условиями являются

$$u(x, 0) = f(x), \quad (13.4.3)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi(x). \quad (13.4.4)$$

Само по себе уравнение (13.4.1), взятое отдельно от условий (13.4.2) – (13.4.4), может иметь очень много весьма разнообразных решений. Среди них имеется и тождественно равное нулю:

$$u(x, t) \equiv 0.$$

Нас же интересует решение, которое удовлетворяет не только уравнению (13.4.1), но также граничным и начальным условиям (13.4.2) – (13.4.4). Очевидно, тождественно равное нулю решение может быть для уравнения (13.4.1) лишь в том случае, когда в начальный момент времени струна находится в состоянии равновесия: $f(x) \equiv 0$, и при этом неподвижна: $\varphi(x) \equiv 0$. Во всех остальных случаях решение уравнения (13.4.1) тождественно равняться нулю не может.

Будем искать решение уравнения (13.4.1), отличное от тождественного нуля и удовлетворяющее граничным условиям (13.4.2), в виде произведения функции X , зависящей только от x , и функции T , зависящей только от t . Иными словами, пусть

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Подстановка последнего выражения в уравнение (13.4.1) дает нам

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Функция, стоящая в левой части этого равенства, не зависит от x , а функция, стоящая в правой части, – от t . Следовательно, в действительности обе эти функции не зависят ни от x , ни от t , т.е. являются некоторой постоянной. Предположим, что эта постоянная отрицательная (смысл этого предположения выявится далее), и обозначим ее через $-\lambda$ ($\lambda > 0$):

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Таким образом, имеем

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (13.4.5)$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (13.4.6)$$

откуда, решая эти дифференциальные уравнения, получаем ($k^2 + \lambda = 0 \Rightarrow k^2 = -\lambda \Rightarrow k_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda}i$ – комплексные корни; аналогично $k^2 + \lambda a^2 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm a\sqrt{\lambda}i$)

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x, \quad (13.4.7),$$

$$T(t) = C \cos a\sqrt{\lambda}t + D \sin a\sqrt{\lambda}t, \quad (13.4.8),$$

где A, B, C, D – некоторые постоянные, для их определения воспользуемся граничными и начальными условиями.

13.4.2. Использование граничных условий

Имеем

$$u(x, t) = (A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x)(C \cos a\sqrt{\lambda}t + D \sin a\sqrt{\lambda}t).$$

Второй сомножитель справа не может тождественно обращаться в нуль (в противном случае имели бы $u \equiv 0$, что противоречит предположению). Следовательно, для обеспечения граничных условий (13.4.2) должно быть

$$X(0) \equiv 0, \quad X(l) \equiv 0.$$

Полагая в выражении (13.4.7) $x = 0$ и $x = l$, получаем

$$\begin{cases} 0 = A \cdot 1 + B \cdot 0, \\ 0 = A \cos \sqrt{\lambda} l + B \sin \sqrt{\lambda} l, \end{cases}$$

откуда

$$A = 0, \quad B \sin \sqrt{\lambda} l = 0. \quad (13.4.9).$$

Здесь $B \neq 0$, так как иначе было бы $X(x) \equiv 0$ и $u \equiv 0$. Из решения (13.4.9) следует, что $\sin \sqrt{\lambda} l = 0$, т.е. при некотором целом n $\sqrt{\lambda} l = n\pi$, и значит $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}$ (здесь $n \neq 0$, так как при $n = 0$ $X \equiv 0$ и опять-таки $u \equiv 0$).

Эти значения λ называются собственными значениями рассматриваемой задачи, а соответствующие им функции

$$X = B \sin \sqrt{\lambda} x = B \sin \frac{n\pi}{l} x \text{ — собственными функциями.}$$

Теперь выясним смысл предположения $\lambda > 0$. Если бы было $\lambda < 0$, то уравнение (13.4.5) можно было бы записать в виде

$$X'' - (-\lambda)X = 0,$$

откуда $(k^2 + \lambda = 0 \Rightarrow k^2 = -\lambda \Rightarrow k_{1,2} = \pm \sqrt{-\lambda} \text{ } (-\lambda > 0))$

$$X(x) = A e^{\sqrt{-\lambda} x} + B e^{-\sqrt{-\lambda} x},$$

и полученное решение уравнения ни при каких значениях A и B (за исключением случая $A = B = 0$) не может одновременно удовлетворять обоим граничным условиям (13.4.2). Действительно, из системы

$$\begin{cases} X(0) = A + B = 0 \\ X(l) = A e^{-\sqrt{-\lambda} l} + B e^{\sqrt{-\lambda} l} = 0 \end{cases}$$

следует, что $A = B = 0$.

13.4.3. Использование начальных условий

Подставим найденные значения λ в уравнение (13.4.8):

$$T(t) = C \cdot \cos \frac{an\pi}{\ell} t + D \sin \frac{an\pi}{\ell} t.$$

При любых значениях постоянных C и D произведения

$$\sin \frac{n\pi}{\ell} x \cdot C \cdot \cos \frac{an\pi}{\ell} t \quad \text{и} \quad \sin \frac{n\pi}{\ell} x \cdot D \cdot \sin \frac{an\pi}{\ell} t \quad (13.4.10)$$

будут решениями уравнения (13.4.1), удовлетворяющими граничным условиям (13.4.2). В силу линейности уравнения (13.4.1) любая сумма функций вида (13.4.10) будет решением (13.4.1) и также будет удовлетворять граничным условиям (13.4.2).

Возьмем поэтому набор функций вида

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x \left(C_n \cdot \cos \frac{an\pi}{\ell} t + D_n \cdot \sin \frac{an\pi}{\ell} t \right)$$

(где B включен в C_n и D_n) и постараемся так распорядиться значениями произвольных до сих пор постоянных C_n и D_n , чтобы сумма этих функций удовлетворяла еще и начальным условиям (13.4.3) и (13.4.4). Это значит, что будем искать решение уравнения (13.4.1), удовлетворяющее граничным и начальным условиям (13.4.2) – (13.4.4), в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \left(C_n \cdot \cos \frac{an\pi}{\ell} t + D_n \cdot \sin \frac{an\pi}{\ell} t \right). \quad (13.4.11)$$

Так как здесь имеем дело не с суммой, а с рядом, для того чтобы этот ряд был решением уравнения (13.4.1), необходимо чтобы сходился как он сам, так и ряды, получаемые из него в результате двукратного его почленного дифференцирования по x и по t .

$$\text{Полагая в (13.4.11) } t = 0, \text{ имеем } u(x, t) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Если на отрезке $[0, \ell]$ функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье по синусам, то в качестве коэффициентов C_n можно взять соответствующие ко-

$$\text{эффициенты Фурье: } C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx.$$

Такой выбор постоянных C_n обеспечивает соблюдение начального условия (13.4.3).

Переходим к начальному условию (13.4.4). Дифференцируя равенство (13.4.11) по t , получим

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \left(-C_n \cdot \frac{an\pi}{\ell} \cdot \sin \frac{an\pi}{\ell} t + D_n \cdot \frac{an\pi}{\ell} \cdot \cos \frac{an\pi}{\ell} t \right)$$

или, подставляя $t = 0$, $\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{n\pi}{\ell} x \right) \cdot D_n \cdot \frac{an\pi}{\ell}$.

Если функция $\varphi(x)$ разлагается на отрезке $[0, \ell]$ в ряд Фурье по синусам, то в качестве величин $D_n \cdot \frac{an\pi}{\ell}$ можно взять коэффициенты этого разложения

$$D_n \frac{an\pi}{\ell} = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx,$$

откуда

$$D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx.$$

Применение рассмотренного метода Фурье оказывается оправданным, если получающийся для функции u ряд можно дважды почленно дифференцировать по каждой из переменных x и t .

Таким образом, частное решение краевой задачи находится по формуле

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \left(C_n \cos \frac{an\pi}{\ell} t + D_n \sin \frac{an\pi}{\ell} t \right), \quad (13.4.11)$$

где коэффициенты C_n и D_n определяются следующим образом:

$$C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx, \quad D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx.$$

Пример 1. Решим уравнение колебания струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с закрепленными концами $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$ при начальных условиях:

$$u(x, 0) = f(x) = \sin^3 x, \quad (13.4.12)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x) = 0. \quad (13.4.13)$$

Согласно сказанному частное решение находится по формуле (13.4.11), где C_n – коэффициенты в разложении функций $f(x)$ в ряд Фурье по синусам, а D_n – коэффициенты в разложении в ряд Фурье по синусам функции $\varphi(x)$.

Нетрудно убедиться в том, что разложением в ряд по синусам в данном случае будет

$$f(x) = \sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x \text{ (школьная формула),}$$

так что $C_1 = \frac{3}{4}, C_3 = -\frac{1}{4}$, а остальные коэффициенты C_n обращаются в нуль. Из условия (13.4.13) видно, что коэффициенты D_n разложения должны быть равны нулю.

Таким образом, в данном случае

$$u(x, t) = \frac{3}{4} \sin \frac{\pi x}{\ell} \cos \frac{a\pi}{\ell} t - \frac{1}{4} \sin \frac{3\pi x}{\ell} \cos \frac{3a\pi}{\ell} t.$$

Полученный ряд является конечной суммой, и поэтому все вопросы, связанные с его сходимостью и почленным дифференцированием, решаются тривиальным образом.

13.5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

Решим следующую простейшую задачу. Найти непрерывное в замкнутой области $(0 \leq x \leq \ell, 0 \leq t \leq T)$ решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (13.5.1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq \ell) \quad (13.5.2)$$

и граничным условиям:

$$u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T). \quad (13.5.3)$$

Не равное тождественно нулю решение будем искать в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (13.5.4)$$

Подставляя u, u'_t, u''_{xx} в уравнение (13.5.1), получаем

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda (\lambda > 0). \quad (13.5.5)$$

Отсюда

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (13.5.6)$$

$$T' + a^2 \lambda T = 0. \quad (13.5.7)$$

Решая первое обыкновенное дифференциальное уравнение, получим

$$X = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x.$$

$$X(0) = 0, X(\ell) = 0 \Rightarrow A = 0, \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{\ell}, n = 1, 2, \dots, \text{ т. е. } \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2.$$

Тогда $X_n = B \sin \frac{n\pi}{\ell} x$ – собственные функции задачи.

Решим уравнение (13.5.7), которое является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными

$$\frac{dT}{dt} = -a^2 \lambda T \Rightarrow \frac{dT}{T} = -a^2 \lambda dt \Rightarrow \int \frac{dT}{T} = -a^2 \lambda \int dt + \ln C \Rightarrow$$

$$\ln T = -a^2 \lambda t + \ln C \Rightarrow \ln |T| = \ln e^{-a^2 \lambda t} + \ln C \Rightarrow T = C \cdot e^{-a^2 \lambda t}.$$

Значениям λ_n соответствуют решения уравнения (13.5.7)

$$T_n(t) = C_n \cdot e^{-a^2 \lambda_n t}, \quad (13.5.8)$$

где C_n – неопределенные пока коэффициенты.

Тогда функции

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = C_n \cdot e^{-a^2 \lambda_n t} \sin \frac{\pi n}{\ell} x \quad (13.5.9)$$

(коэффициент B включен в C_n) являются частными решениями уравнения (13.5.1), удовлетворяющим условию (13.5.3).

Но решением будет и функция

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{\ell} x. \quad (13.5.10)$$

Функция $u(x, t)$ должна удовлетворять еще и начальному условию (13.5.2).

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin \frac{\pi n}{\ell} x,$$

то есть C_n является коэффициентом Фурье функции $\varphi(x)$ при разложении ее в ряд по синусам на интервале $(0, \ell)$. Поэтому

$$C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx. \quad (13.5.11)$$

Нужно требовать непрерывность $\varphi(x)$ и непрерывность ее первой производной.

Таким образом, частное решение уравнения теплопроводности (13.5.1), удовлетворяющее краевым условиям (13.5.2) – (13.5.3) находится по формуле (13.5.10), где коэффициенты C_n вычисляются по формуле (13.5.11).

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

1. Основные понятия дифференциальных уравнений с частными производными.
2. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.
3. Основные уравнения математической физики (волновое, теплопроводности, Лапласа), их тип.
4. Формулировка краевых задач для основных уравнений математической физики.
5. Решение краевой задачи для волнового уравнения по формуле Даламбера.
6. Метод Фурье решения краевой задачи для волнового уравнения.
7. Метод Фурье решения уравнения теплопроводности.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**

**Учебно-информационный блок
для проведения практических занятий**

Тема занятия	Тип занятия	Кол-во часов
1. Решение простейших уравнений математической физики. Формула Даламбера решения задачи Коши для волнового уравнения	Повторение и обобщение имеющихся знаний. Усвоение и закрепление изученного на лекции нового материала	2
2. Решение волнового уравнения и уравнения теплопроводности методом Фурье	Углубление и расширение полученных знаний. Усвоение нового материала. Текущий контроль. Итоговый контроль	2

Основная и дополнительная литература

1. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак. – Минск : Навука и тэхніка, 1991.
2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление : в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1978. – Т. 2.
3. Воробьев, Н.Н. Теория рядов / Н.Н. Воробьев. – М. : Наука, 1973.
4. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1980. – Ч. II.

I. Решение простейших уравнений математической физики.

Формула Даламбера решения задачи Коши для волнового уравнения

Рассмотрим некоторые простейшие дифференциальные уравнения с частными производными.

1. Преподаватель у доски решает вместе со студенческой аудиторией.

Обучающий пример 1. Найти функцию $z = z(x, y)$, удовлетворяющую уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$.

Решение. Интегрируя по x , получим $z = x + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – произвольная функция от y . Это общее решение данного дифференциального уравнения.

2. Студент у доски решает.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$, где $z = z(x, y)$.

Ответ: $z = y^3 + \varphi(x)y + \psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – произвольные функции от x .

3. Преподаватель у доски решает.

Обучающий пример 2. Решить уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

Решение. Интегрируя уравнение по x , имеем $\frac{\partial z}{\partial y} = f(y)$. Проинтегрировав полученный результат по y , находим $z = \int f(y) dy + \varphi(x) = \psi(y) + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ – произвольные функции.

4. Студент у доски решает

Пример 2. Найти общее решение уравнения: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$.

Ответ: $z = xy + \int \varphi(y) dy + \psi(x)$, где $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ – произвольные функции.

Рассмотрим решение уравнения колебания бесконечной струны методом Даламбера. Сформулируем краевую задачу. Уравнение колебания

струны имеет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x \in (-\infty, \infty)$; граничные условия отсутствуют, а начальные условия: $u(x, 0) = f(x)$, $f(x)$ задает положение струны при $t = 0$ и $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ задает скорость движения каждой точки струны при $t = 0$. Требуется найти частное решение волнового уравнения, удовлетворяющего начальным условиям. Это можно сделать по формуле Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(z) dz.$$

5. Преподаватель у доски решает.

Обучающий пример 3. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u(x, 0) = x^2$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$.

Решение. Так как $a = 1$, а $\varphi(x) = 0$, то $u = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2}$, где $f(x) = x^2$. Таким образом,

$$u = \frac{(x - t)^2 + (x + t)^2}{2} = \frac{x^2 - 2xt + t^2 + x^2 + 2xt + t^2}{2} = x^2 + t^2.$$

6. Студенты у доски решают примеры.

Пример 3. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u(x, 0) = 0$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = x$.

Ответ: $u = xt$.

Пример 4. Найти форму струны, определяемой уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в момент $t = \frac{\pi}{2a}$, если $u(x, 0) = \sin x$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 1$.

Ответ: $u = \sin x \cdot \cos at + t$. Если $t = \frac{\pi}{2a}$, то $u = \frac{\pi}{2a}$, т.е. струна параллельна оси абсцисс.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Изучить по теоретической части модуля материал к следующему практическому занятию по теме «Решение волнового уравнения и уравнения теплопроводности методом Фурье».

2. Решить следующие примеры.

1) Найти общее решение уравнения $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$.

Ответ: $z = x \int f_1(y) dy + \int \varphi_1(y) dy + \psi(x)y + \psi_1(x)$, где $f_1(y) = \int f(y) dy$, $\varphi_1(y) = \int \varphi(y) dy$, $f(y), \varphi(y), \psi(x), \psi_1(x)$ – произвольные функции от своих переменных.

2) Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u(x, 0) = x$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = -x$.

3) Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если

а) $u(x, 0) = e^x$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \omega x$ ($\omega = \text{const}$);

б) $u(x, 0) = x(x - 2)$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = e^x$.

4) Найти форму струны, определяемой уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, в момент $t = \pi$, если $u(x, 0) = \sin x$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \cos x$.

Ответ: $u = \sin(x + t)$, при $t = \pi$ $u = -\sin x$.

II. Решение волнового уравнения и уравнения теплопроводности методом Фурье

Рассмотрим краевую задачу колебания струны с закрепленными концами:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ – волновое уравнение;}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad f(x) \text{ задает положение струны при } t = 0;$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi(x), \quad \varphi(x) \text{ задает скорость движения каждой точки струны}$$

в начальный момент времени. Это начальные условия, а граничные условия $u(0, t) = 0, u(\ell, t) = 0$ означают, что концы струны закреплены. Краевая задача заключается в том, что требуется найти частное решение волнового уравнения, удовлетворяющее начальным и граничным (называемых краевыми) условиям.

Применяя метод Фурье (разделения переменных), получаем, что частное решение находится по формуле

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \left(C_n \cos \frac{an\pi}{\ell} t + D_n \sin \frac{an\pi}{\ell} t \right),$$

где $C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx, D_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx.$

1. Преподаватель у доски решает

Обучающий пример 1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$

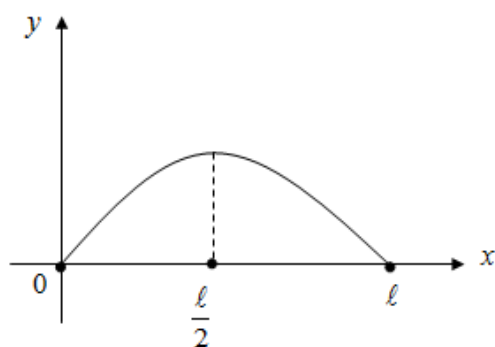
$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0; u(x, 0) = \sin \pi x + \sin 2\pi x, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Решение. $\varphi(x) = 0$, отсюда следует, что все $D_n = 0$.

$$f(x) = \sin \pi x + \sin 2\pi x.$$

Справа имеем ряд Фурье по синусам, где $C_1 = 1, C_2 = 1, C_n = 0$ для $n > 2$. Поэтому $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x \cdot C_n \cos an\pi t$, или

$u(x, t) = \sin \pi x \cdot \cos a\pi t + \sin 2\pi x \cdot \cos 2a\pi t$ – искомое частное решение.



Обучающий пример 2.

Струна, закрепленная на концах $x = 0, x = \ell$, имеет в начальный момент форму параболы $u = \frac{4h}{\ell^2} x(\ell - x)$. Определить смещение точек струны от оси абсцисс, если начальные скорости отсутствуют.

Решение. Здесь $f(x) = \frac{4h}{\ell^2}x(\ell - x)$, $\varphi(x) = 0$. Найдем коэффициенты ряда, определяющего решение уравнения колебания струны:

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx = \frac{8h}{\ell^3} \int_0^\ell (\ell x - x^2) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx = \\
 &= \left| \begin{array}{l} u = \ell x - x^2, \quad d\vartheta = \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx \\ du = (\ell - 2x) dx, \quad \vartheta = -\frac{\ell}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{\ell} x \end{array} \right| = \\
 &= \frac{8h}{\ell^3} \left(-\frac{\ell}{n\pi} (\ell x - x^2) \cos \frac{n\pi}{\ell} x \Big|_0^\ell + \frac{\ell}{n\pi} \int_0^\ell (\ell - 2x) \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx \right) = \\
 &= \frac{8h}{n\pi \ell^2} \int_0^\ell (\ell - 2x) \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx = \\
 &= \left| \begin{array}{l} u = \ell - 2x, \quad d\vartheta = \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx \\ du = -2 dx, \quad \vartheta = \frac{\ell}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \end{array} \right| = \frac{8h}{n\pi \ell^2} \cdot \frac{\ell}{n\pi} (\ell - 2x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x \Big|_0^\ell + \\
 &+ \frac{8h}{\ell^3} \cdot \frac{2\ell}{n\pi} \int_0^\ell \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx = -\frac{16h}{n^2 \pi^2 \ell} \cdot \frac{\ell}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{\ell} x \Big|_0^\ell = \\
 &= -\frac{16h}{n^3 \pi^3} (\cos n\pi - 1) = \frac{16h}{n^3 \pi^3} (1 - (-1)^n).
 \end{aligned}$$

Два раза применена формула интегрирования по частям.

$D_n = 0$, так как $\varphi(x) = 0$, поэтому

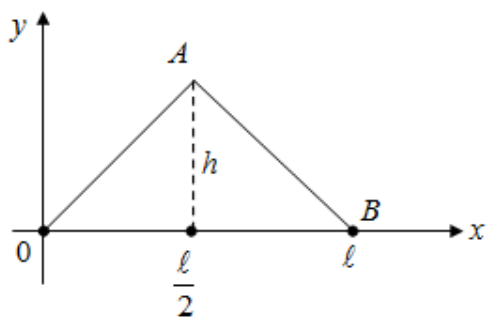
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16h}{n^3 \pi^3} (1 - (-1)^n) \cos \frac{n\pi a}{\ell} t \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Но если $n = 2k$, то $1 - (-1)^n = 0$, а если $n = 2k - 1$, то $1 - (-1)^n = 2$.

Тогда $u(x, t) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \cos \frac{(2k-1)\pi a}{\ell} t \cdot \sin \frac{(2k-1)\pi}{\ell} x$ – искомое

частное решение, которое определяет смещение точек струны от оси абсцисс в любой момент времени.

2. Студент у доски решает



Пример 1. Дана струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$. Пусть в начальный момент форма струны имеет вид ломаной OAB , изображенной на рисунке. Найти форму струны для любого момента времени t , если начальные скорости отсутствуют.

Указание:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2h}{l}x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}; \\ \frac{2h}{l}x(l-x), & \text{если } \frac{l}{2} \leq x \leq l; \end{cases} \quad \varphi(x) = 0.$$

Ответ:
$$u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \cdot \sin \frac{n\pi}{l}x \cdot \cos \frac{an\pi}{l}t.$$

Рассмотрим простейшую краевую задачу для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Требуется найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $u(x,0) = f(x)$ и двум граничным условиям $u(0,t) = u(l,t) = 0$.

В этом случае частное решение получается в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \cdot \sin \frac{n\pi}{l}x, \text{ где } C_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx.$$

3. Преподаватель у доски решает

Обучающий пример 3. Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($0 < x < l$), $t > 0$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}; \\ l-x, & \text{если } \frac{l}{2} \leq x < l \end{cases}$$

и граничным условиям $u(0,t) = u(l,t) = 0$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx + \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} (\ell - x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx = \\
 &= \left| \begin{array}{l} u_1 = x; \quad d\vartheta = \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx; \quad u_2 = \ell - x \\ du_1 = dx; \quad \vartheta = -\frac{\ell}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{\ell} x; \quad du_2 = -dx \end{array} \right| = \\
 &= \frac{2}{\ell} \left(-\frac{\ell}{n\pi} \cdot x \cdot \cos \frac{n\pi}{\ell} x \Big|_0^{\ell/2} + \frac{\ell}{n\pi} \int_0^{\ell/2} \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx \right) + \\
 &+ \frac{2}{\ell} \left(-\frac{\ell(\ell - x)}{n\pi} \cdot \cos \frac{n\pi}{\ell} x \Big|_{\ell/2}^{\ell} - \frac{\ell}{n\pi} \int_{\ell/2}^{\ell} \cos \frac{n\pi}{\ell} x dx \right) = \\
 &= \frac{2}{\ell} \cdot \frac{\ell^2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \Big|_0^{\ell/2} - \frac{2}{\ell} \cdot \frac{\ell^2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{\ell} x \Big|_{\ell/2}^{\ell} = \frac{2\ell}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$u(x, t) = \frac{4\ell}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2}{\ell} t} \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Студент у доски решает

Пример 2. Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальному условию $u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } 0 \leq x \leq 1; \\ 2 - x, \text{ если } 1 \leq x < 2 \end{cases}$ и граничным условиям $u(0, t) = u(2, t) = 0$.

$$\text{Ответ: } u(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4} t} \cdot \sin \frac{n\pi}{2} x.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Решить следующие примеры.

1. Пусть начальные отклонения струны, закрепленной в точках $x = 0$

и $x = \ell$, равны нулю, а начальная скорость $\frac{\partial u}{\partial t} = \begin{cases} v_0, & \text{если } \left| x - \frac{\ell}{2} \right| < \frac{h}{2} \\ 0, & \text{если } \left| x - \frac{\ell}{2} \right| > \frac{h}{2}. \end{cases}$

Определить форму струны в любой момент времени.

Ответ: $u(x, t) = \frac{4v_0\ell}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \cdot \sin \frac{n\pi h}{2\ell} \cdot \cos \frac{n\pi a}{\ell} t \cdot \sin \frac{n\pi}{\ell} \cdot x.$

2. Дан тонкий однородный стержень длины ℓ , имеющий начальную температуру $f(x) = \frac{cx(\ell - x)}{\ell^2}$. Концы стержня поддерживаются при температуре, равной нулю. Определить температуру стержня в любой момент времени t .

Векторный анализ в системах компьютерной алгебры: Maple и Mathcad

Maple – программный пакет, система компьютерной алгебры, является продуктом компании Waterloo Maple Inc., которая с 1984 года выпускает программные продукты, ориентированные на сложные математические вычисления, визуализацию данных и моделирование.

Система Maple предназначена для символьных вычислений, хотя имеет ряд средств и для численного решения дифференциальных уравнений и нахождения интегралов. К тому же обладает развитыми графическими средствами., имеет собственный язык программирования, схожий с алгоритмическим языком Паскаль.

Рассмотрим вычисление задач векторного анализа. Изучим действия тех команд, которые могут понадобиться при решении компьютерных задач данного модуля.

Написание стандартных математических функций в Maple:

Математическая запись	Запись в Maple
e^x	exp(x)
$\ln x$	ln(x)
$\lg x$	lg(x)
$\log_a x$	log[a](x)
\sqrt{x}	sqrt(x)
$ x $	abs(x)
$\sin x$	sin(x)
$\cos x$	cos(x)
$\operatorname{tg} x$	tan(x)
$\operatorname{ctg} x$	cot(x)
$\arcsin x$	arcsin(x)
$\arccos x$	arccos(x)
$\operatorname{arctg} x$	arctan(x)

В основную библиотеку Maple включены минимальные средства для работы с векторами, матрицами, графиками и т.д. Основные функции содержатся в пакетах **linalg**, **plots**, **student** и т.д. Пакеты состоят из более 100 функций и вызываются командой **with** (имя пакета), так как показано ниже.

Команда > **with(linalg);** – подключение библиотеки для решения задач линейной алгебры.

Рассмотрим назначение некоторых функций пакета linalg:

angle – вычисляет угол между векторами;

curl – вычисляет ротор вектора;

diverge – вычисляет дивергенцию векторной функции;

grad – градиент векторного выражения;

jacobian – вычисляет якобиан векторной функции;

Команда > **with(plots);** – подключение библиотеки для построения графиков и поверхностей для решения задач указанного модуля.

Для построения графика функции, заданной явно, используются следующие команды:

cylinderplot – построение графика поверхности в цилиндрических координатах;

densityplot – построение двумерного графика плотности;

display – построение графика для списка графических объектов;

display3d – построение графика для списка трехмерных графических объектов;

fieldplot – построение графика двумерного векторного поля;

fieldplot3d – построение графика трехмерного векторного поля;

gradplot – построение графика двумерного векторного поля градиента;

gradplot3d – построение графика трехмерного векторного поля градиента;

implicitplot – построение двумерного графика неявной функции;

implicitplot3d – построение трехмерного графика неявной функции;

polarplot – построение графика двумерной кривой в полярной системе координат;

polygonplot – построение графика одного или нескольких многоугольников;

polygonplot3d – построение одного или нескольких многоугольников;

polyhedraplot – построение трехмерного многогранника;

sphereplot – построение графика трехмерной поверхности в сферических координатах.

К часто используемым параметрам команд построения графиков функций или поверхностей относится light=[angl1, angl2, c1, c2, c3] – задание подсветки поверхности, создаваемой источником света из точки со сферическими координатами (angl1, angl2). Цвет определяется долями красного (c1), зеленого (c2) и синего (c3) цветов, которые находятся в интервале [0,1]. Параметр style=opt задает стиль рисунка: POINT – точки, LINE – линии, HIDDEN – сетки с удалением невидимых линий, PATCH –

заполнителя (установлен по умолчанию), WIREFRAME – сетки с выводом невидимых линий, CONTOUR – линий уровня, PATCHCONTOUR – заполнителя и линий уровня. Параметр shading=opt задает функцию интенсивности заполнителя, его значение равно хуз – по умолчанию, NONE – без раскраски.

Команда **> with (student);** – обязательное подключение библиотеки для решения интегралов из задач указанного модуля.

Все примеры, рассмотренные нами во вкладках, снабжены подсказками, объясняющими необходимые функции, и пояснениями для решения заданий. При необходимости можно воспользоваться приведенными примерами, просто введите свои данные в предложенные нами операторы. Нужно помнить, что в выбранной программе очень важное место занимают операторы «:=» – присвоить, «;» – окончание предложения.

При решении задач по указанной теме с помощью систем компьютерной алгебры рекомендуется разбиение задач на подзадачи или создание блок-схемы. Рассмотрим необходимые для этого методические действия.

Пример П1. Найти поток векторного поля

$$\vec{a} = (3y + 2x)\vec{i} + (3x^3 + 2y - z)\vec{j} + (z^2 - 3y)\vec{k}$$

через замкнутую поверхность $(\sigma): x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z - 1 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$,

где \vec{n} – внешняя нормаль к поверхности (σ) .

Решение. Блок-схема решения приведена на рисунке П.1.

Обратите внимание, что компьютерные математические пакеты могут быть полезны для выполнения 1, 2 и 5 пунктов, а пункты 3 и 4 выполняет пользователь.

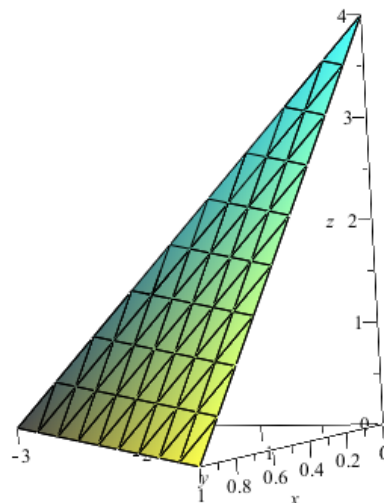
Рассмотрим реализацию заданного примера в Maple.

Выполним построение указанной поверхности. В выбранном к применению пакете введем необходимую для этого функцию «Implicitplot3d».

```
> implicitplot3d(x - y/3 + z/4 = 1, x = 0..1, y = -3..0, z = 0..4);
```

Заметим, что представленное изображение не дает нам достаточного представления о поверхности, поэтому усовершенствуем изображение, введя дополнительные параметры:

arrow ([координаты начала вектора], [координаты конца вектора], ширина стрелки, ширина головы стрелки, высота го-



ловки стрелки как отношение длины тела, (по желанию) форма стрелки: *either harpoon, arrow, double_arrow, or cylindrical_arrow*, (по желанию) цвет {например: *color=BLUE*}).

`polygon ([[координаты вектора{x1, y1, z1}], [x2, y2, z2], ..., [xn, yn, zn]], options)`

`display (один или несколько графиков для построения, options)`

Введем обозначения

$$P1 := x - \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1; P2 := x = 0;$$

$$P3 := y = 0; P4 := z = 0$$

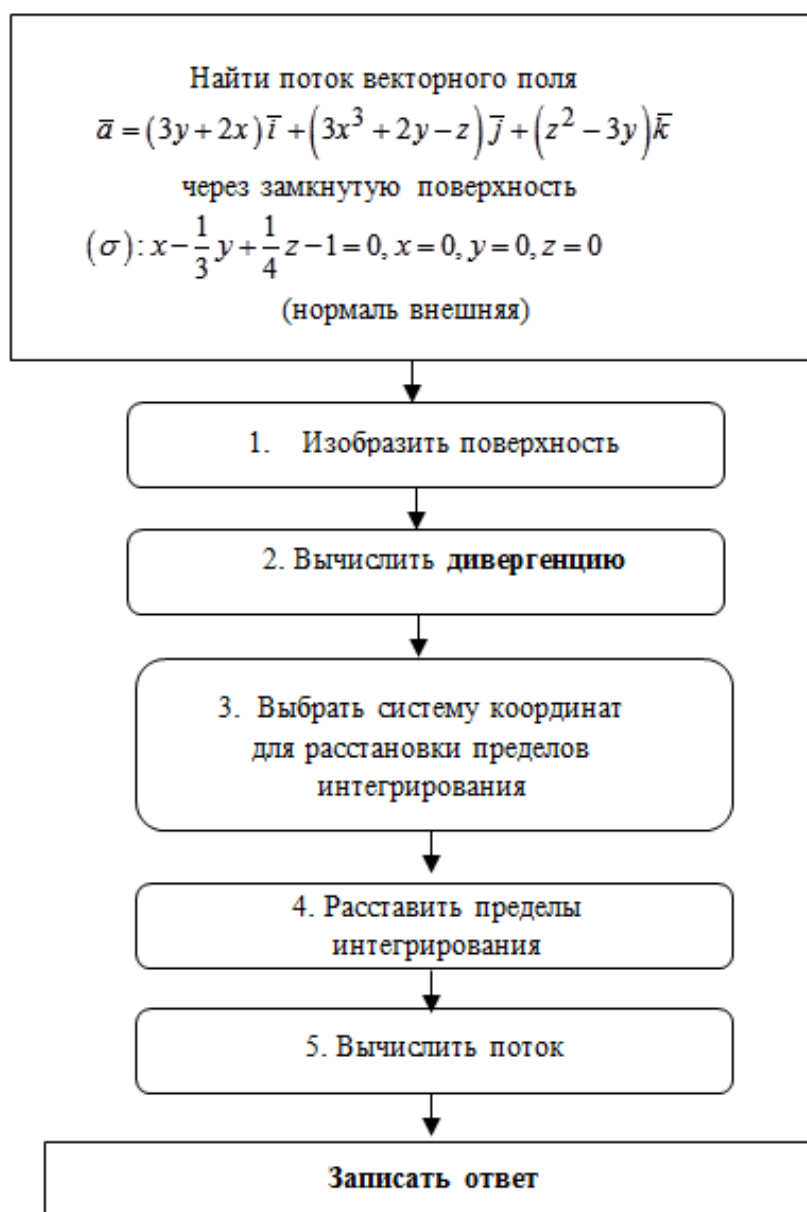


Рис. П.1. – Блок- схема решения примера П.1

Нарисуем поверхность и область пространства, ею ограниченного. Для этого запишем на языке системы "Maple" ее уравнение. Наша поверхность образована частями четырех плоскостей (поверхность пирамиды)

```
> P1 := x -  $\frac{y}{3}$  +  $\frac{z}{4}$  = 1; P2 := x = 0; P3 := y = 0; P4 := z = 0
```

Задаем направляющие векторы декартовой системы координат

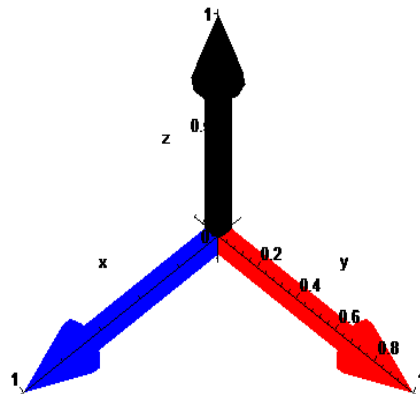
```
> i:=arrow([0,0,0], [1,0,0],.1,.2,.3,cylindrical_arrow, color=BLUE):#02,.07,.2
```

```
> j:=arrow([0,0,0], [0,1,0],.1,.2,.3,cylindrical_arrow, color=RED):
```

```
> k:=arrow([0,0,0], [0,0,1],.1,.2,.3,cylindrical_arrow, color=BLACK):#color=GREEN
```

Проверим "картинку"

```
> plots[display]([i,j,k],axes=normal,style=patchnogrid,labels=[x,y,z],scaling=constrained,tickmarks=[2,4,3]);
```



Вычисляем координаты вершин пирамиды

```
> B:=solve({P1,P2,P3},{x,y,z});A1:=vector([rhs(B[1]),rhs(B[2]),rhs(B[3])]);
```

$B = \{x=0, y=0, z=4\}$

$A1 = [0, 0, 4]$

```
> B:=solve({P1,P2,P4},{x,y,z});A2:=vector([rhs(B[1]),rhs(B[2]),rhs(B[3])]);
```

$A2 = [0, -3, 0]$

```
> B:=solve({P1,P3,P4},{x,y,z});A3:=vector([rhs(B[1]),rhs(B[2]),rhs(B[3])]);
```

$A3 = [1, 0, 0]$

```
> B:=solve({P2,P3,P4},{x,y,z});A4:=vector([rhs(B[1]),rhs(B[2]),rhs(B[3])]);
```

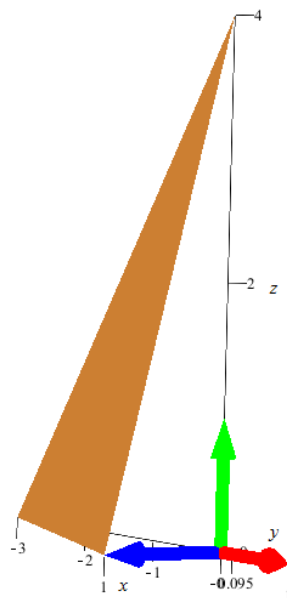
$A4 = [0, 0, 0]$

Грань A1-A2-A3:

```
> H123:=[[A1_1,A1_2,A1_3],[A2_1,A2_2,A2_3],[A3_1,A3_2,A3_3]]
```

```
> N123:=polygon(H123,color=GOLD)
```

```
> plots[display]([i,j,k,N123],axes=normal,style=patchnogrid,labels=[x,y,z],scaling=constrained,tickmarks=[2,4,3])
```

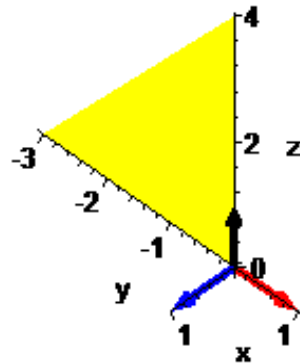


[Грань A1-A2-A4:

> $H124 := [[A1_1, A1_2, A1_3], [A2_1, A2_2, A2_3], [A4_1, A4_2, A4_3]]$

> $N124 := \text{polygon}(H124, \text{color} = \text{YELLOW})$

> $\text{plots_display}([i, j, k, N124], \text{axes} = \text{normal}, \text{style} = \text{patchnogrid}, \text{labels} = [x, y, z], \text{scaling} = \text{constrained}, \text{tickmarks} = [2, 4, 3])$

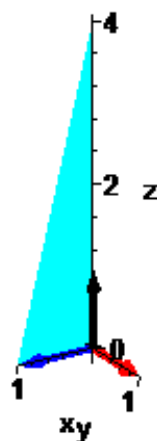


[Грань A1-A3-A4:

> $H134 := [[A1_1, A1_2, A1_3], [A3_1, A3_2, A3_3], [A4_1, A4_2, A4_3]]$

> $N134 := \text{polygon}(H134, \text{color} = \text{CYAN})$

> $\text{plots_display}([i, j, k, N134], \text{axes} = \text{normal}, \text{style} = \text{patchnogrid}, \text{labels} = [x, y, z], \text{scaling} = \text{constrained}, \text{tickmarks} = [2, 4, 3])$

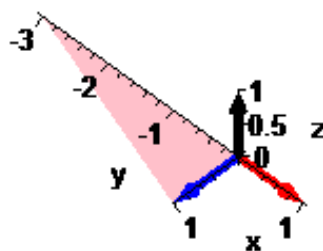


[Грань A2-A3-A4:

> $H234 := [[A2_1, A2_2, A2_3], [A3_1, A3_2, A3_3], [A4_1, A4_2, A4_3]]$

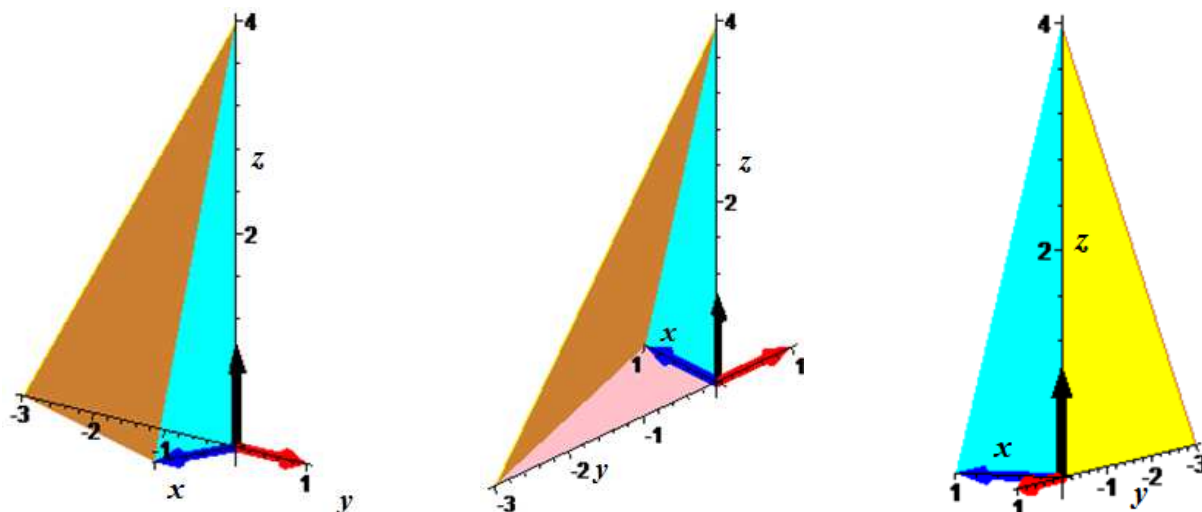
> $N234 := \text{polygon}(H234, \text{color} = \text{PINK})$

> $\text{plots_display}([i, j, k, N234], \text{axes} = \text{normal}, \text{style} = \text{patchnogrid}, \text{labels} = [x, y, z], \text{scaling} = \text{constrained}, \text{tickmarks} = [2, 4, 3])$



[Окончательно вид поверхности

> $\text{plots_display}([i, j, k, N123, N124, N134, N234], \text{axes} = \text{normal}, \text{style} = \text{patchnogrid}, \text{labels} = [x, y, z], \text{scaling} = \text{constrained}, \text{tickmarks} = [2, 4, 3])$



Продemonстрируем вычисление дивергенции векторного поля $\vec{a} = (3y + 2x)\vec{i} + (3x^3 + 2y - z)\vec{j} + (z^2 - 3y)\vec{k}$:

```
> a := vector([3*y + 2*x, 3*x^3 + 2*y - z, z^2 - 3*y]); v := vector([x, y, z]);
> h := diverge(a, v);
```

$h := 4 + 2z$

Вводятся координаты вектора \vec{a} в соответствии с записью математических функций Maple

```
> G := Tripleint(h, z = 0 .. 4 * (1 - x + y/3), y = 0 .. 3 * (x - 1), x = 0 .. 1);
```

$$G := \int_0^1 \int_0^{3x-3} \int_0^{4-4x+\frac{4}{3}y} (4+2z) \, dz \, dy \, dx$$

h- дивергенция, вычисленная на предыдущем шаге

Вычисление интеграла

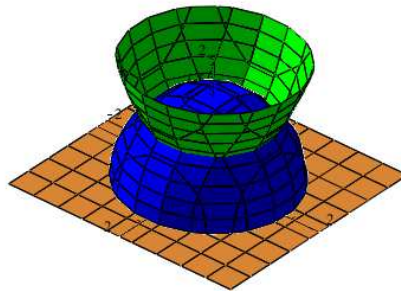
```
> G := value(%);
G := -12
> evalf(G);
-12.
```

Численное значение интеграла

Пример П.2. Найти поток векторного поля $\vec{a} = (x+1)\vec{i} + (z+1)\vec{j}$ через замкнутую поверхность $(\sigma): x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \leq x^2 + y^2, z \geq 0$ по формуле Остроградского – Гаусса.

Решение. 1. Выполним построение заданной фигуры:

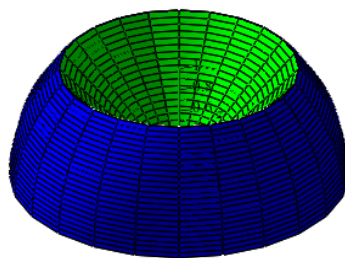
```
> implicitplot3d([x^2 + y^2 + z^2 = 2, z = x^2 + y^2, z = 0], x = -2 .. 2, y = -2 .. 2, z = 0 .. 2,
  color = [blue, green, gold], scaling = constrained, axes = normal, lightmodel =
  'light3');
```



Представленный чертеж недостаточно информирует нас о фигуре, полученной пересечением поверхностей, поэтому усовершенствуем её изображение с помощью функций:

sphereplot (уравнение графика, theta=диапазон, phi=диапазон, options);
cylinderplot (уравнение графика, theta=диапазон, z=диапазон, options).

```
> S1 := sphereplot(sqrt(2), theta = 0 .. 2*Pi, phi = Pi/4 .. Pi/2, color = blue, scaling
  = constrained, axes = normal) :
S2 := cylinderplot(z, theta = 0 .. 2*Pi, z = 0 .. 1, color = green) :
#S3:=cylinder([0,0,0],1,0.001,style=patch,color=blue):
#S4:=cylinder([0,0,0],1/sqrt(2),-0.01,style=patchnogrid,color=green):
plots[display]([S1, S2], orientation = [165, 61], lightmodel = 'light3');
```



2. Вычислим дивергенцию заданного поля. Для этого введем координаты поля \vec{a} и найдем дивергенцию:

$\vec{a} := \text{vector}([\text{координата вектора } x, \text{ координата вектора } y, \text{ координата вектора } z]):$
 $v := \text{vector}([x, y, z]):$

$h := \text{diverge}(a, v);$ # вычисление дивергенции


```

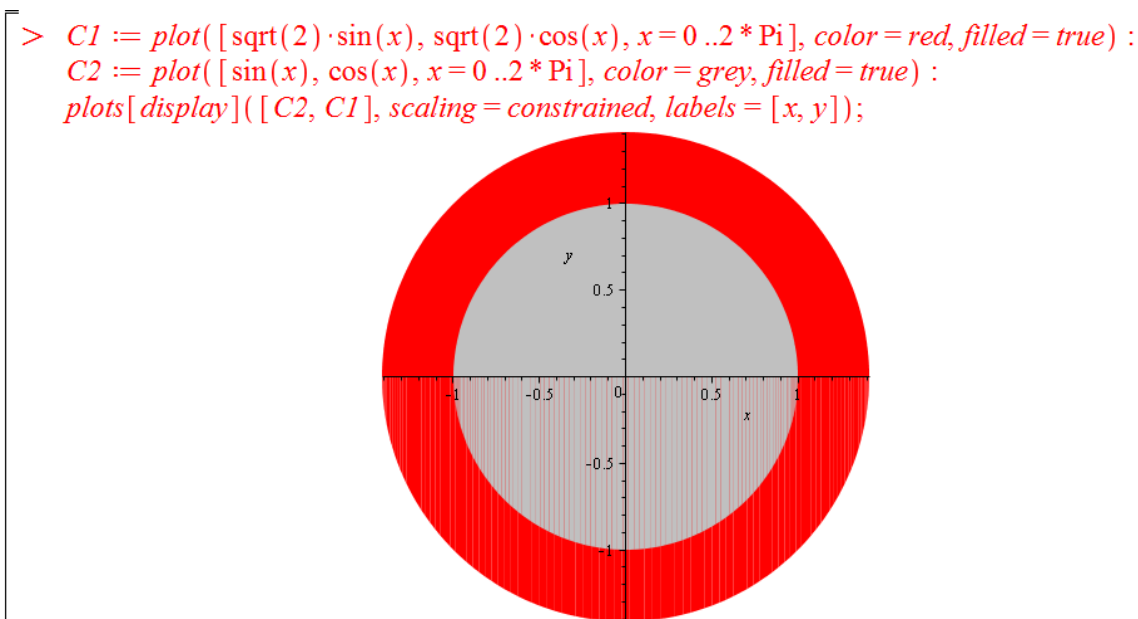
> restart : with(linalg) :
> a := vector([x + 1, z + 1, 0]) : v := vector([x, y, z]) :

> h := diverge(a, v);

h := 1

```

3. Выполним построение проекции полученной фигуры на плоскость xOy :



4. Воспользуемся формулой для вычисления потока поля через заданную поверхность. Так как $h=1$, то вычисляя поток с помощью формулы Остроградского – Гаусса, получим $\Pi = \iiint_{(V)} dx dy dz$. Полученный тройной ин-

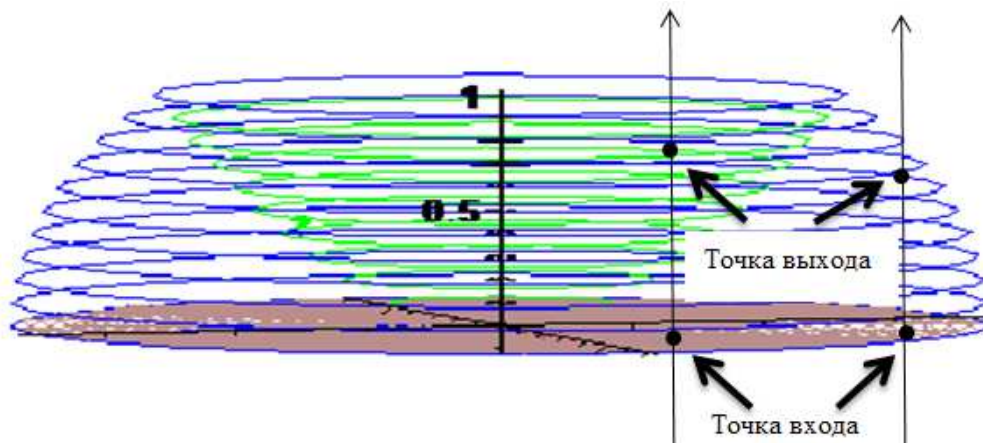
теграл $\iiint_{(V)} dx dy dz$ выражает объем тела, ограниченного заданной замкнутой

поверхностью. В силу симметрии тела относительно начала координат, $\Pi = 4 \cdot \iiint_{(V_1)} dx dy dz$, где (V_1) – часть тела, расположенного в первом октанте.

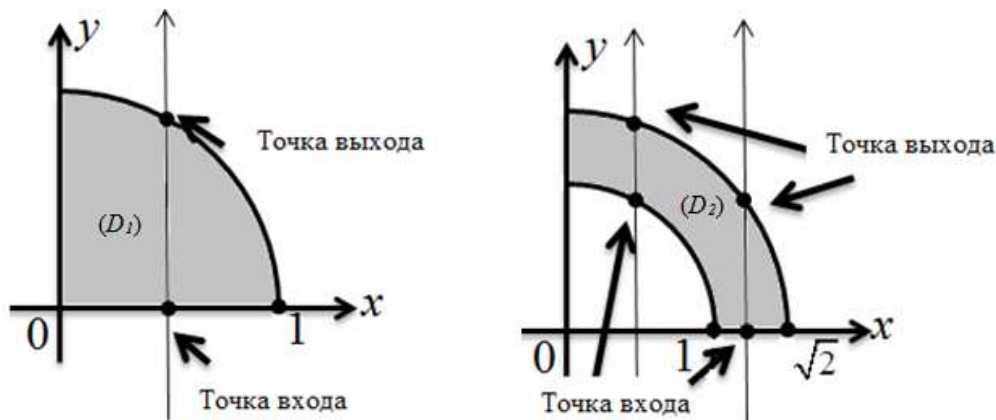
Приступим к расстановке пределов интегрирования. Полученное изображение показывает, что имеем область с неоднозначно заданным выходом, который математически описывается двумя различными функциями. Поэтому обратим внимание на необходимость разбиения области интегрирования на части так, чтобы однозначно был задан вход в область и выход из нее.

$$\Pi = 4 \cdot \iiint_{(V_1)} dx dy dz = 4 \cdot \left(\iint_{(D_1)} dx dy \int_0^{x^2+y^2} dz + \iint_{(D_2)} dx dy \int_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz \right) =$$

$$= 4 \left(\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{x^2+y^2} dz + \left(\int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz \right) \right)$$



Выполним построение областей (D_1) и (D_2) . В случае области (D_2) опять в процессе расстановки пределов интегрирования возникает необходимость разбиения ее на части, так как имеем неоднозначно заданный вход, который также математически описывается двумя различными функциями.



5. Вычислим интересующий нас поток. В выбранном к применению пакете Maple введем необходимую для этого функцию «*MultiInt*» (подынтегральная функция, пределы по внутреннему интегралу (z)=нижний предел..верхний предел, (y)=нижний предел..верхний предел, (x)=нижний предел..верхний предел);).

```

> with(Student[MultivariateCalculus]) :
> G := MultiInt(h, z = 0 .. x^2 + y^2, y = 0 .. sqrt(1 - x^2), x = 0 .. 1, output = integral);

```

$$G := \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} 1 \, dz \, dy \, dx$$

```

> T := MultiInt(h, z = 0 .. sqrt(2 - x^2 - y^2), y = sqrt(1 - x^2) .. sqrt(2 - x^2), x = 0 .. 1,
  output = integral);

```

$$T := \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}} 1 \, dz \, dy \, dx$$

```

> N := MultiInt(h, z = 0 .. sqrt(2 - x^2 - y^2), y = 0 .. sqrt(2 - x^2), x = 1 .. sqrt(2),
  output = integral);

```

$$N := \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}} 1 \, dz \, dy \, dx$$

С помощью функций «value(%)» или «evalf()» найдем значение вычисленного интеграла.

```

> evalf(4 * (G + N + T));

```

3.665191429

Замечание. Для студентов, которым представляется что введение интегралов в системах компьютерной алгебры (СКА) Maple сложно, можно продемонстрировать альтернативное вычисление потока в СКА Mathcad. Поэтому приведем вычисление $\Pi = 4 \cdot \iiint_{(V_1)} dx dy dz$ также и в математическом пакете Mathcad.

$$\Pi := 4 \cdot \left[\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} 1 \, dz \, dy \, dx + \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}} 1 \, dz \, dy \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2-y^2}} 1 \, dz \, dy \, dx \right]$$

$\Pi = 3.665$

Таким образом, получено численное значение искомого потока.

Ответ: 3,665.

Более подробно применение СКА Mathcad в теории векторного анализа будет представлено ниже.

Продemonстрируем возможности СКА Maple для вычисления других важных числовых и векторных характеристик, имеющих в арсенале математического аппарата векторного анализа.

Пример П.3. Найти угол между градиентами полей $W = x^3 + y^3 - 2z^3$, $U = x^2 - y^2 + z^2$ в точке $M(1, -1, 1)$.

Решение. Может быть реализовано по следующему алгоритму:

- 1) найдем градиент поля U ;
- 2) найдем градиент поля W ;
- 3) вычислим значение градиента поля U в точке;
- 4) вычислим значение градиента поля W в точке $M(1, -1, 1)$;
- 5) найдем угол между градиентами полей W и U .

```
> restart;# Очистим память Maple
> with(linalg):# Подключим математические пакеты,
    необходимые для работы
> w := x^3 + y^3 - 2*z^3;#введем данные первого поля w
    w := x^3 + y^3 - 2z^3
> W := grad(w, [x, y, z]);# вычислим градиент поля w
    W := [ 3x^2 3y^2 -6z^2 ]
> W[1]; W[2]; W[3];
    # разобьем градиент поля w на отдельные координаты
    3x^2
    3y^2
    -6z^2
> u := x^2 - y^2 + z^2;#введем данные второго поля u
    u := x^2 - y^2 + z^2
> U := grad(u, [x, y, z]);# вычислим градиент поля u
    U := [ 2x -2y 2z ]
> x := 1 : y := -1 : z := 1 :# введем координаты заданной точки
> W[1]; W[2]; W[3];
    # вычислим значения градиента поля w в заданной точке
    3
    3
    -6
> U[1]; U[2]; U[3];
    # вычислим значения градиента поля u в заданной точке
    2
    2
    2
```

```

> F := vector( [ W[1], W[2], W[3]] ) : v := vector( [x, y, z] ) :
# запишем значение градиента поля w в заданной точке
> G := vector( [ U[1], U[2], U[3]] ) : v := vector( [x, y, z] ) :
# запишем значение градиента поля u в заданной точке
> phi = angle(F, G); #вычислим угол между градиентами полей u, w

$$\phi = \frac{1}{2} \pi$$

> evalf( angle(F, G) );
# вычислим приближенное численное значение угла
1.570796327

```

Таким образом, получено численное значение искомого угла.

Ответ: 1,570796327.

Пример П.4. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a} = x\bar{i} + (y+1)\bar{j} + z\bar{k}$ через замкнутую кривую $(L): \frac{x}{2} - y + \frac{z}{2} = 1$, воспользовавшись определением циркуляции.

Решение.

1. Подключим пакеты, необходимые для работы.

```

> restart;
> with(plots); with(plottools); plots( fieldplot3d ); plots( display );
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal,
conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display,
dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal,
interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot,
listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot,
pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot,
rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot,
surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]
[arc, arrow, circle, cone, cuboid, curve, cutin, cutout, cylinder, disk, dodecahedron, ellipse,
ellipticArc, hemisphere, hexahedron, homothety, hyperbola, icosahedron, line, octahedron,
parallelepiped, pieslice, point, polygon, project, rectangle, reflect, rotate, scale, semitorus,
sphere, stellate, tetrahedron, torus, transform, translate]

```

Введем функцию (L) :

```

> L :=  $\frac{x}{2} - y + \frac{z}{2} = 1$ ;

$$L := \frac{1}{2} x - y + \frac{1}{2} z = 1$$


```

Выполним построение заданной кривой, применяя функции, описанные выше.

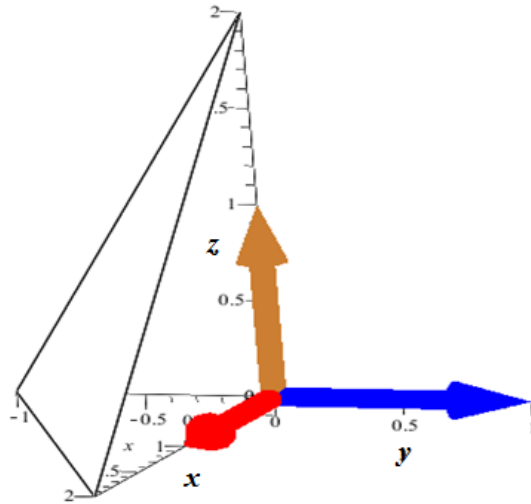
```

> pol := [[solve(subs(y=0, z=0, L), x), 0, 0], [0, solve(subs(x=0, z=0, L),
y), 0], [0, 0, solve(subs(x=0, y=0, L), z)]] :
poly := polygon(pol, color = gray) :

> i := arrow( [0, 0, 0], [1, 0, 0], .1, .2, .3, cylindrical_arrow, color = red) :
> j := arrow( [0, 0, 0], [0, 1, 0], .1, .2, .3, cylindrical_arrow, color = blue) :

> k := arrow( [0, 0, 0], [0, 0, 1], .1, .2, .3, cylindrical_arrow, color = gold) :
> a := fieldplot3d([x, y + 1, z], x=0..1, y=-2..0, z=0..3, arrows = SLIM, grid
= [5, 7, 15]) :
> plots[display]([poly, a, i, j, k], axes = normal);

```



Для вычисления циркуляции, а значит, расстановки пределов интегрирования, необходимо разбить заданную кривую на части, спроектированные на координатные плоскости Oxy , Oxz , Ozy . Выполним дополнительные построения.

```

> y(x) := x/2 - 1; z(y) := 2*(1+y); z(x) := 2-x;

      y:=x→1/2 x-1
      z:=y→2 y+2
      z:=x→2-x

> isolate(L, x);

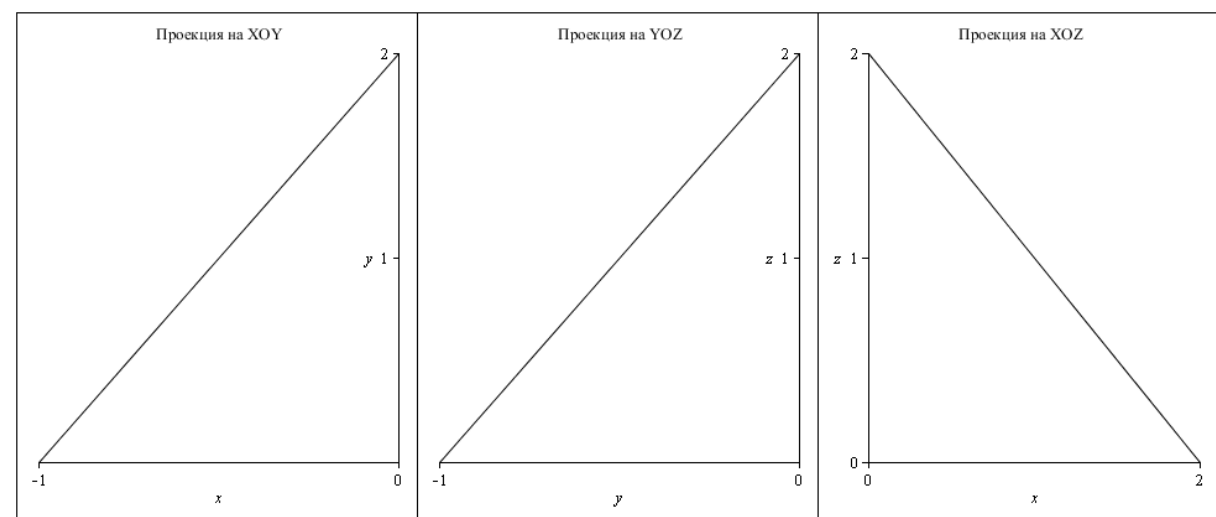
      x=2 y+2-z

```

```

> f := transform((x, y, z) → [x, y]) :
>
> XY := plots[display]([f(poly)], labels = [x, y], title = "Проекция на XOY",
tickmarks = [2, 3]) :
> f := transform((x, y, z) → [y, z]) :
>
> YZ := plots[display]([f(poly)], labels = [y, z], title = "Проекция на YOZ",
tickmarks = [2, 3]) :
> f := transform((x, y, z) → [x, z]) :
>
> XZ := plots[display]([f(poly)], labels = [x, z], title = "Проекция на XOZ",
tickmarks = [2, 3]) :
> display(array(1..3, [XY, YZ, XZ]));

```



Далее, согласно определению циркуляции, продолжим вычисление интегралов отдельно по каждой части.

```

> with(student) :
> P = Int(x, x = 0 .. 2) + Int( $\frac{x}{4}$ , x = 0 .. 2) + Int(0, x = 0 .. 2);

```

$$P = \int_0^2 x \, dx + \int_0^2 \frac{1}{4} x \, dx + \int_0^2 0 \, dx$$

```

> P = int(x, x = 0 .. 2) + int( $\frac{x}{4}$ , x = 0 .. 2) + int(0, x = 0 .. 2);

```

$$P = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned}
&> G = \text{Int}(x, x=2 \dots 0) + \text{Int}(-2+x, x=2 \dots 0) + \text{Int}(0, x=2 \dots 0); \\
&\quad G = \int_2^0 x \, dx + \int_2^0 (-2+x) \, dx + \int_2^0 0 \, dx \\
&> G = \text{int}(x, x=2 \dots 0) + \text{int}(-2+x, x=2 \dots 0) + \text{int}(0, x=2 \dots 0); \\
&\quad G = 0 \\
&> K = \text{Int}(y+1, y=0 \dots -1) + \text{Int}(4+4y, y=0 \dots -1) + \text{Int}(0, y=0 \dots -1); \\
&\quad K = \int_0^{-1} (1+y) \, dy + \int_0^{-1} (4+4y) \, dy + \int_0^{-1} 0 \, dy \\
&> K = \text{int}(y+1, y=0 \dots -1) + \text{int}(4+4y, y=0 \dots -1) + \text{int}(0, y=0 \dots -1); \\
&\quad K = -\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Таким образом, циркуляция равна $C = -\frac{5}{2} + 0 + \frac{5}{2} = 0$.

Ответ: 0.

Пример П.5. Проверить, являются ли поля $\bar{h} = 2xy^4\bar{i} + (4x^2y^3 + 3)\bar{j}$ и $\bar{a} = (2y^2 + 4x - z)\bar{i} + (4x^2 + y + 2z^2)\bar{j} + (z + 3)\bar{k}$ потенциальными. В случае потенциальности, найти их потенциалы. Вычислить роторы полей.

Рассмотрим каждый пример отдельно.

В начале проверим на потенциальность поле $\bar{a} = (2y^2 + 4x - z)\bar{i} + (4x^2 + y + 2z^2)\bar{j} + (z + 3)\bar{k}$. Отметим, что «false» – «ложь», «true» – «правда».

```

> restart : with(linalg) :# подключим пакет по линейной алгебре
> a := [2*y^2 + 4*x - z, 4*x^2 + y + 2*z^2, z + 3] :
    # зададим векторное поле a
> potential(a, [x, y, z], 'V'); # проверка поля на потенциальность
    false
> print(V); # вычислим потенциал поля a
    V
> v := [x, y, z] :#зададим вектор v
> curl(a, v); # вычислим ротор поля a
    [-4 z -1 8 x - 4 y]

```



```

> restart : with(linalg) :# подключим пакет по линейной алгебре
> h := [2·x·y4, 4·x2·y3 + 3, 0] :# зададим векторное поле h
> potential(h, [x, y, z], 'V') :# проверка поля на потенциальность
                                true
> print(V) :# вычислим потенциал поля h
                                x2 y4 + 3 y
> v := [x, y, z] :# зададим вектор v
> curl(h, v) :# вычислим ротор поля h
                                [ 0 0 0 ]

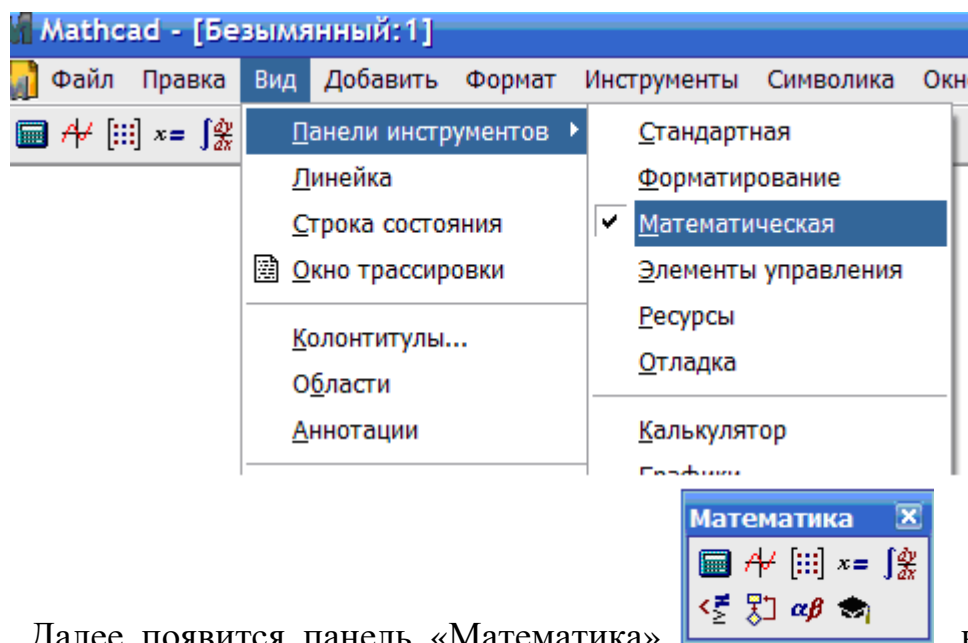
```

Ответ: векторное поле \bar{a} не является потенциальным, его $\overline{rot a} = -4z\bar{i} - \bar{j} + (8x - 4y)\bar{k}$. Векторное поле \bar{h} является потенциальным, его потенциал: $x^2 y^4 + 3y$.

Рассмотрим один из наиболее популярных среди студентов технических специальностей математических пакетов – MathCAD.

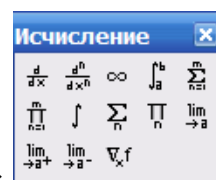
Чтобы начать работать с приложением, вызовите панель **Calculus** (вычисления).

Выберите на панели вкладку ВИД → ПАНЕЛИ ИНСТРУМЕНТОВ → МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

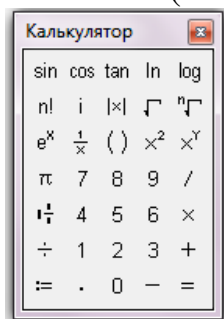


Далее появится панель «Математика», на которой продолжаем выбирать следующие друг за другом вкладки:

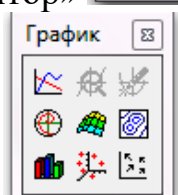
1) «Математический анализ (Исчисление)»



2) «Калькулятор»



3) «График»



Рассмотрим несколько примеров по заданной тематике. Продемонстрируем вычисление задания в системе компьютерной алгебры Mathcad.

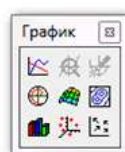
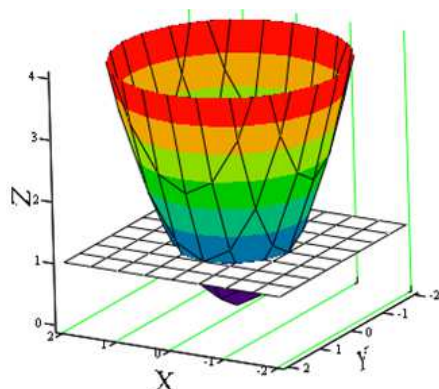
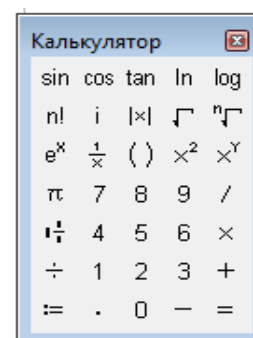
Пример П.6. Используя поверхностный интеграл второго рода, вычислить поток векторного поля, если $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, поверхность (σ): часть параболоида $z = x^2 + y^2$, удовлетворяющая условию $z \leq 1$, а \vec{n} – внешняя нормаль к параболоиду.

Решение. Изобразим поверхность (σ).

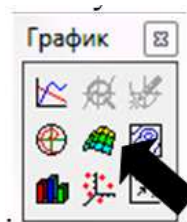
$$z(x, y) := x^2 + y^2$$

$$h(x, y) := 1$$

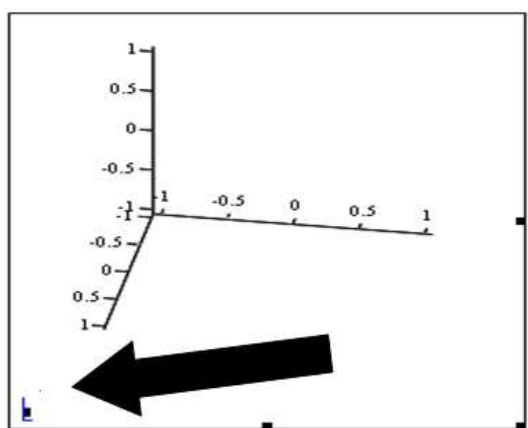
введем поверхность $z(x, y)$
введем поверхность $z_1(x, y) = h(x, y)$



Для этого с помощью вкладки «калькулятор» введем функции z и h . Обратим внимание, что обязательно указывать, от каких переменных зависит та или иная функция. В нашем случае $z(x,y)$ и $h(x,y)$. Затем на вкладке

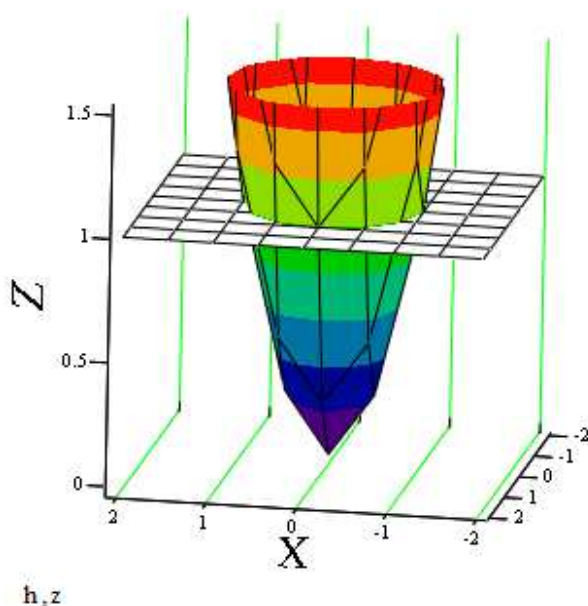


«График» следует нажать кнопку «График поверхности». , появляется следующий блок



В место указанное стрелочкой следует ввести свои поверхности через запятую (например: z, h) и щелкнуть клавишей мыши в любое свободное место, вне блока с поверхностью.

При желании можно вращать график поверхности, выбирая лучший ракурс или изменяя его масштаб.



Из геометрических построений понятно, что

1) единичная нормаль \bar{n}_0 (т.к. она – внешняя нормаль) образует тупой угол с осью Oz ;

2) она образует острый угол с осью Ox в тех точках, где $x \geq 0$ и тупой – в тех, где $x < 0$;

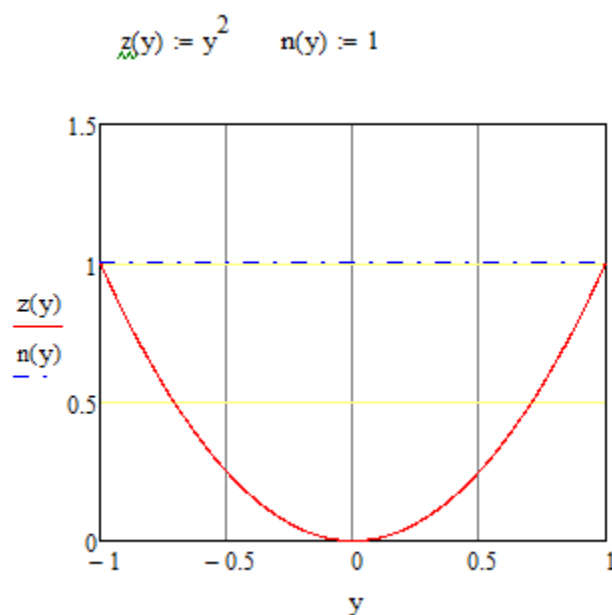
3) \bar{n}_0 образует острый (тупой угол) с осью Oy в точках, где выполняется неравенство $y > 0$ ($y < 0$).

Для вычисления потока векторного поля воспользуемся интегралом второго рода:

$$\begin{aligned} \Pi = \iint_{(\sigma, \bar{n})} P dydz + Q dzdx + R dx dy &= \iint_{(\sigma, \bar{n})} dydz + dzdx + z dx dy = \\ &= \iint_{(\sigma, \bar{n})} dydz + \iint_{(\sigma, \bar{n})} dzdx + \iint_{(\sigma, \bar{n})} z dx dy. \end{aligned}$$

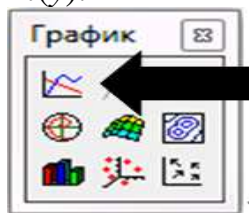
Вычислим каждый из трех интегралов отдельно. Для вычисления интеграла $\iint_{(\sigma, \bar{n})} dydz$ разобьем поверхность (σ) плоскостью Ozy на две части:

(σ_1) и (σ_2) . Поясним, что (σ_1) соответствует той части параболоида, где $x \geq 0$, (σ_2) – той части параболоида, где $x < 0$. Необходимость разбиения продиктована, как уже отмечалось выше, тем фактором, что нормаль \bar{n}_0 на (σ_1) образует острый угол с осью Ox (т.е. $\cos \alpha > 0$), а на (σ_2) – тупой. Проекцией (σ_1) и (σ_2) на плоскость Ozy является одна и та же область (D_{zy}) .

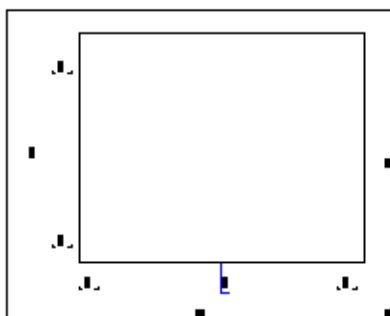


Построение приведенного графика осуществлялось по следующему алгоритму:

1. Введем функции $z(y)$ и $n(y)$.

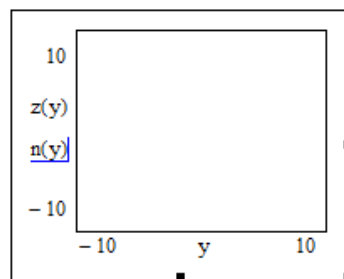


2. На вкладке «График» выберем кнопку «График».
3. В рабочем окне появляется следующий блок.

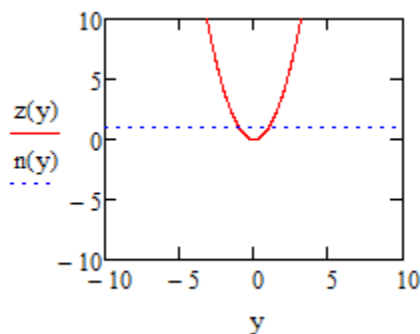


Пустые маркеры этого блока заполняем следующим образом:

- в нижний центральный маркер поставим независимую переменную (в нашем случае – y);
- в центральный левый через запятую необходимо ввести 2 функции: $z(y)$, $n(y)$;
- нижние и левые крайние маркеры предназначены для указания минимального и максимального значений по осям (в нашем случае введено -10 и 10).



4. После заполнения блока щелчком левой клавишей мыши в любое место вне его. График будет построен.



5. Затем с помощью маркеров масштаба отредактируем изображение.

Продолжим вычисление интеграла, заметим, что

$$\iint_{(\sigma, \bar{n})} dydz = \iint_{(\sigma, \bar{n})} dydz + \iint_{(\sigma, \bar{n})} dydz = \iint_{(D_{zy})} dydz - \iint_{(D_{zy})} dydz = 0.$$

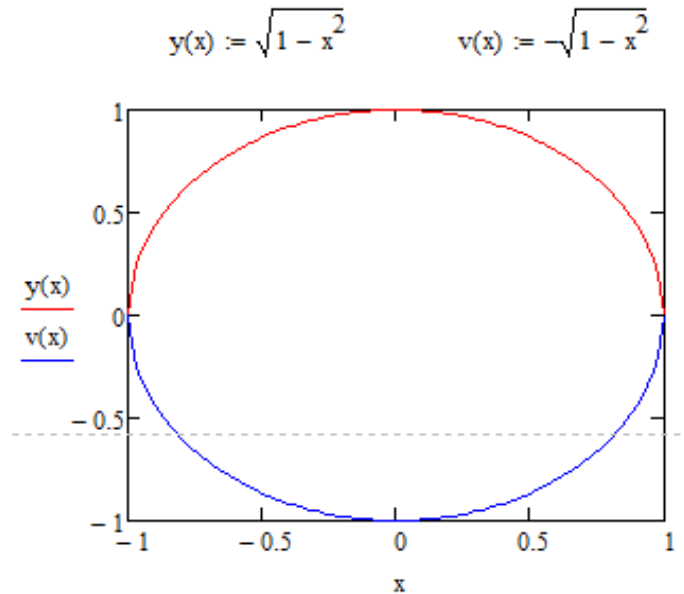
Знак минус поставлен перед вторым двойным интегралом, поскольку на (σ_2) нормаль образует тупой угол с осью Ox (или, что то же самое, $\cos \alpha < 0$). Из соображений симметрии понятно, что и

$$\iint_{(\sigma, \bar{n})} dzdx = 0. \text{ Осталось вычислить } \iint_{(\sigma, \bar{n})} zdx dy.$$

Как отмечалось выше, $\cos \gamma < 0$, поэтому имеем

$$\iint_{(\sigma, \bar{n})} zdx dy = - \iint_{(D_{xy})} (x^2 + y^2) dx dy,$$

где (D_{xy}) – проекция поверхности (σ) на плоскость Oxy .



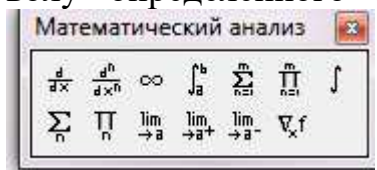
Для вычисления двойного интеграла $\iint_{(\sigma, \bar{n})} zdx dy = - \iint_{(D_{xy})} (x^2 + y^2) dx dy$

перейдем к полярным координатам:

$$\iint_{(\sigma, \bar{n})} zdx dy = - \iint_{(D_{xy})} (x^2 + y^2) dx dy = - \iint_{(D_{\rho\phi})} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\phi = - \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \rho^3 d\rho.$$

Вычислим представленный интеграл в Mathcad.

Для того чтобы ввести двойной интеграл, дважды щелкните по символу определенного интеграла на панели «Математический анализ»



$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 -\rho^3 d\rho d\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (-\rho)^3 d\rho d\varphi = -1.571$$

Таким образом, поток векторного поля равен $-\frac{\pi}{2} \approx -1.571$.

Ответ: $-1,571$.

Обратим внимание на то, что всю информацию, предлагаемую во вкладках, следует проработать самостоятельно с использованием компьютера. Это будет способствовать приобретению прочных навыков применения систем компьютерной алгебры для решения конкретных простейших задач и поможет подготовиться к решению заданий более сложного уровня.

Учебное издание

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методический комплекс
для студентов технических специальностей

В 2 частях

Часть 2

Редактор *О. П. Михайлова*
Дизайн обложки *М. С. Мухоморова*

Подписано в печать 20.12.2017. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 9,76. Уч.-изд. л. 9,28. Тираж 30 экз. Заказ

Издатель и полиграфическое исполнение –
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/305 от 22.04.2014.

ЛП № 02330/278 от 08.05.14.

Ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк.